Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 7, No 2, 2017, December
ISSN 2222-5498

Условия излучения Реллиха-Повзнера для уравнения Гельмгольца

Н.А. Габибова, Э.Х. Эйвазов

Аннотация. В работе доказано, что для выделения единственного решения уравнения Гельмгольца достаточны более слабые условия излучения Повзнера-Реллиха чем условия Зоммерфельда. Дается обоснование существования решения неоднородного уравнения Гельмгольца удовлетворяющее условию Повзнера-Реллиха.

Key Words and Phrases: Уравнения Гельмгольца, условия излучения Зоммерфельда, условию излучения Повзнера- Реллиха, фундаментальное решение, принцип максимума.

2010 Mathematics Subject Classifications: 35J05, 35E05, 35C15, 78A40

1. Введение

Известно, что (см., например, [4, стр.413]) решение уравнения Пуассона $\Delta u = -f$ во всем пространстве единственно в классе функций, обращающихся в нуль на бесконечности. Для уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = -f$, $k > 0$, тесно связанного с волновым уравнением и встречающимся во многих областях математической физики, это утверждение неверно (см., [4], [8] и [15]). Легко можно проверить, что в трехмерном евклидовом пространстве R_3 однородное уравнение Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$, $k > 0$, имеет нетривиальное решение вида $u(x,k) = \frac{\sin k|x|}{4\pi|x|}$. Этот пример показывает, что требования равномерного стремления к нулю на бесконечности явно недостаточно для выделения единственного решения. Чтобы выделить класс единственности для уравнения Гельмгольца в неограниченных областях нужны дополнительные ограничения на поведение решения на бесконечности. Такими математическими ограничениями являются так называемые условия излучения Зоммерфельда

$$\lim_{|x|\to+\infty} |x| \left(\frac{\partial u(x)}{\partial |x|} \mp iku(x) \right) = 0 \ . \tag{1}$$

В дальнейшем, пользуясь этими условиями, И.Н.Векуа [3], В.Р.Вайнберг [2], В.В.Грушин [5], В.Д.Купрадзе [6], А.Р. Алиев и Э.Х. Эйвазов [1, 10], К.Мочизуки [13], М.Зубэлдиа[15] решили различные математические и физические задачи. Р.Ф.

 © 2011 JCAM All rights reserved.

Реллих [14] и А.Я. Повзнер [7] показали, что условия (1) можно заменить более слабыми условиями (мы эти условия назовем условиями Повзнера- Реллиха) в следующей интегральной форме

$$\lim_{\rho\to+\infty}\int_{S_\rho}\left|\frac{\partial u}{\partial|x|}\mp i\sqrt{\lambda}u\right|^2 ds=0, \tag{2}$$

где S_ρ- сфера радиуса ρ с центром в начале координата, а λ- положительное число.

Цель этой работы исследовать однородное ($\Delta u+k^2u=0,\ k>0$) и неоднородное ($\Delta u+k^2u=-f,\ k>0$) уравнения Гельмгольца в условиях излучения Повзнера-Реллиха.

Отметим, что несмотря на внешние сходства уравнений

$$\Delta u+k^2u=0,\ k>0 \tag{3}$$

и

$$\Delta u-k^2u=0,\ k>0 \tag{4}$$

на самом деле они имеют разные свойства. Например, несмотря на то, что для уравнения (4) принцип максимума справедлив (см., лемму), следующий пример показывает, что для уравнения (3) это неверно.

Пример (см., [8, стр.332]). На круге $U_R=\left\{(x,y)\in R_2:\ x^2+y^2<R^2\right\}$ рассмотрим уравнение $\Delta u+k^2u=0,\ k>0$. Очевидно, что функция Бесселя нулевого порядка $J_0\left(k\sqrt{x^2+y^2}\right)$, имеющая абсолютный максимум в центре круга U_R, является решением этого уравнения.

Для уравнения (4) справедлива следующая

Лемма. *Решение уравнения* (4) *непрерывное в замкнутой области* $\bar{D}$ n*-мерного евклидово пространства* R_n*, не может достигать во внутренних точках области* D *положительных максимальных и отрицательных минимальных значений.*

Доказательство. Пусть, напротив, решение $u(x)$ уравнения (4) принимает свое положительное максимальное значение в некоторой внутренней точке ξ_0,

$$u(\xi_0)=\max_{\overline{D}}u(x)>0. \tag{5}$$

Следовательно, в этой точке имеем:

$$\frac{\partial^2u(\xi_0)}{\partial x_k^2}\le 0\,,\ k=1,2,...,n. \tag{6}$$

Так как ξ_0- внутренняя точка области D, то по непрерывности (5) и (6) остаются в силе в некоторой окрестности $U_{r_0}(\xi_0)\subset D$ точки ξ_0. Учитывая (5) и (6) , получаем

$$\Delta u(x)-k^2u(x)<0,\ x\in U_{r_0}(\xi_0)\,. \tag{7}$$

Неравенство (7) показывает, что функция $u(x)$ не является решением уравнение (4). Полученное противоречие показывает, что первоначальное предположение неверно. Заменяя $u(x)$ на $-u(x)$, заключаем, что функция $u(x)$ не может принимать свое отрицательное минимальное значение в области D. Лемма доказана.

Замечание. В трехмерном пространстве эта лемма доказана в книге [8,стр.332]).

2. Основные результаты

Теперь исследуем существование и единственность решения уравнения Гельмгольца удовлетворяющее условию Повзнера- Реллиха.

Теорема 1. *Пусть* λ *положительное число. Тогда в классе функций* $W^2_{2,\,loc}(R_3)$ *решение задачи*

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = f, \ \ \lambda > 0 \\ \lim\limits_{\rho \to +\infty} \int_{S_\rho} \left| \frac{\partial u}{\partial |x|} - i\sqrt{\lambda} u \right|^2 ds = 0 \end{cases}$$

единственно.

Доказательство. Прежде всего отметим, что $W^2_{2,\,loc}(R_3)$- локальное пространство Соболева второго порядка. Покажем, что если обобщенная функция $u(x)$ из пространства $W^2_{2,\,loc}(R_3)$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца $\Delta u + \lambda u = 0, \ \ \lambda > 0$, и условию излучения Повзнера- Реллиха $\lim\limits_{\rho \to +\infty} \int_{S_\rho} \left| \frac{\partial u}{\partial |x|} - i\sqrt{\lambda} u \right|^2 ds = 0$, то $u(x) = 0$. Докажем сначала, что если функция $u(x) \in W^2_{2,\,loc}(R_3)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \ \ \lambda > 0 \\ \lim\limits_{\rho \to +\infty} \int_{S_\rho} \left| \frac{\partial u}{\partial |x|} - i\sqrt{\lambda} u \right|^2 ds = 0 \end{cases}, \tag{8}$$

то $u(x) \in L_2(R_3)$. Выберем некоторое положительное числоρ_0. Тогда из условия $u(x) \in W^2_{2,\,loc}(R_3)$ получим, что для достаточно больших $\rho > \rho_0$

$$\int_{S\rho} \left(u \frac{\partial \overline{u}}{\partial |x|} - \overline{u} \frac{\partial u}{\partial |x|} \right) dS = 0. \tag{9}$$

Пользуясь формулами

$$\begin{aligned} &\left| \tfrac{\partial u}{\partial |x|} - i\sqrt{\lambda} u \right|^2 = \left(\tfrac{\partial u}{\partial |x|} - i\sqrt{\lambda} u \right) \left(\overline{\tfrac{\partial u}{\partial |x|} - i\sqrt{\lambda} u} \right) = \\ &= \left(\tfrac{\partial u}{\partial |x|} - i\sqrt{\lambda} u \right) \left(\tfrac{\partial \overline{u}}{\partial |x|} + i\sqrt{\lambda} \overline{u} \right) = \\ &= \tfrac{\partial u}{\partial |x|} \tfrac{\partial \overline{u}}{\partial |x|} + i\sqrt{\lambda} \overline{u} \tfrac{\partial u}{\partial |x|} - i\sqrt{\lambda} u \tfrac{\partial \overline{u}}{\partial |x|} + \lambda u \overline{u} = \\ &= \left(\left| \tfrac{\partial u}{\partial |x|} \right| \right)^2 - i\sqrt{\lambda} \left(u \tfrac{\partial \overline{u}}{\partial |x|} - \overline{u} \tfrac{\partial u}{\partial |x|} \right) + \lambda |u|^2 \end{aligned}$$

получим

$$i\sqrt{\lambda} \left(u \frac{\partial \overline{u}}{\partial |x|} - \overline{u} \frac{\partial u}{\partial |x|} \right) = \left(\left| \frac{\partial u}{\partial |x|} \right| \right)^2 + \lambda |u|^2 - \left| \frac{\partial u}{\partial |x|} - i\sqrt{\lambda} u \right|^2. \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует:

$$\int_{S_\rho} \left| \frac{\partial u}{\partial |x|} - i\sqrt{\lambda} u \right|^2 ds = \int_{S_\rho} \left[\left(\left| \frac{\partial u}{\partial |x|} \right| \right)^2 + \lambda |u|^2 \right] ds.$$

Используя полученное тождество и условие излучения Повзнера- Реллиха $\lim\limits_{\rho\to+\infty}\int_{S_\rho}\left|\frac{\partial u}{\partial|x|}-i\sqrt{\lambda}u\right|^2 ds=0$, имеем

$$\lim_{\rho\to+\infty}\int_{S_\rho}\left[\left(\left|\frac{\partial u}{\partial|x|}\right|\right)^2+\lambda|u|^2\right]ds=0. \tag{11}$$

Из (11) сразу получается интегральное представление решения задачи (8)

$$u(x,k)=\frac{1}{4\pi}\int_{S_{\rho_0}}\left[\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\frac{\partial u}{\partial|y|}-u(y,k)\frac{\partial}{\partial|y|}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\right]dS_y \tag{12}$$

в любой внутренней точке области $|x|>\rho_0$. Из соотнощений (11) и (12) вытекает, что справедливы следующие асимптотические формулы:

$$u(x)=O\left(\frac{1}{|x|}\right),\ \ |x|\to+\infty$$

и

$$\int_{S_\rho}\left[\left(\left|\frac{\partial u}{\partial|x|}\right|\right)^2+\lambda|u|^2\right]ds=O\left(\frac{1}{\rho^2}\right),\ \ \rho\to+\infty.$$

Применяя метод итерирования (см.[11]) к представлению (12) можно найти такое положительное число h, что

$$\int_{S_\rho}|u|^2 ds=O\left(\frac{1}{\rho^{1+h}}\right),\ \ \rho\to+\infty. \tag{13}$$

Воспользовавшись соотношением (13), получим

$$\int_{|x|\geq\rho_0}|u(x)|^2 dx<+\infty. \tag{14}$$

Так как $u\in W^2_{2,loc}(R_3)$, то из неравенства (14) вытекает, что $u(x)\in L_2(R_3)$. Отсюда учитывая, что $u(x)$ является решением однородного уравнения Гельмгольца заключаем, что $u\in W^2_2(R_3)\bigcap W^1_2(R_3)$.

Теперь умножая равенство $\Delta u+\lambda u=0$ на функцию $\overline{u(x)}$ и интегрируя полученное выражение по всему пространству R_3, находим

$$\sum_{k=1}^{3}\int_{R_3}\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|^2 dx+\lambda\int_{R_3}|u(x)|^2 dx=0.$$

Отсюда получаем, что функция $u(x)$ тождественно равна нулю. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть λ и ε положительные числа, а $f(x)$- произвольная функция из $L_2(R_3)$. Тогда решение уравнения $\Delta u+\lambda u=-f(x)$, удовлетворяющее условию $\lim\limits_{\rho\to+\infty}\int_{S_\rho}\left|\frac{\partial u}{\partial|x|}-i\sqrt{\lambda}u\right|^2 ds=0$, есть предел (в $W^2_{2,loc}(R_3)$) решения уравнения*

$$\Delta u_\varepsilon + (\lambda + i\varepsilon)\, u_\varepsilon = -f\,(x)\,\text{при}\varepsilon \to +0. \tag{15}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $f\,(x) \in C_0^\infty\,(R_3)(C_0^\infty\,(R_3)$- совокупность всех финитных, бесконечно дифференцируемых в R_3 функций). Так как оператор $-\Delta$ самосопряжен в пространстве $L_2\,(R_3)$ и его спектр совпадает с промежутком $[0,+\infty)$, то для произвольного положительного числа ε уравнение (15) имеет единственное решение. Положим $\sqrt{\lambda + i\varepsilon} = \eta + i\sigma$, где η и σ положительные числа. Очевидно, что $\eta \to \sqrt{\lambda}$, $\sigma \to 0$ при $\varepsilon \to +0$. В силу финитности функции $f\,(x)$, решение $u_\varepsilon\,(x)$ уравнения (15) из класса $W_{2,\,loc}^2\,(R_3)$ принадлежит пространству $W_2^1\,(R_3)$.

Выберем некоторое положительное числоρ_0. Применяя к функциям $u_\varepsilon\,(x)$ и $-\frac{1}{4\pi|x-y|}e^{i\sqrt{\lambda+i\varepsilon}|x-y|}$ формулу Грина, получаем представление

$$\begin{aligned} u_\varepsilon\,(x) = \tfrac{1}{4\pi}\textstyle\int_{S_{\rho_0}}\left[\frac{e^{(-\sigma+i\eta)|x-y|}}{|x-y|}\frac{\partial u_\varepsilon(y)}{\partial|y|} - u_\varepsilon\,(y)\,\frac{\partial}{\partial|y|}\frac{e^{(-\sigma+i\eta)|x-y|}}{|x-y|}\right]dS_y + \\ + \tfrac{1}{4\pi}\textstyle\int_{|x|\geq\rho_0}\frac{e^{(-\sigma+i\eta)|x-y|}}{|x-y|}f\,(y)\,dy = \ u_\varepsilon^{(1)}\,(x) + u_\varepsilon^{(2)}\,(x)\,, \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$u_\varepsilon^{(1)}\,(x) = \tfrac{1}{4\pi}\textstyle\int_{S_{\rho_0}}\left[\frac{e^{(-\sigma+i\eta)|x-y|}}{|x-y|}\frac{\partial u_\varepsilon(y)}{\partial|y|} - u_\varepsilon\,(y)\,\frac{\partial}{\partial|y|}\frac{e^{(-\sigma+i\eta)|x-y|}}{|x-y|}\right]dS_y$$

$$u_\varepsilon^{(2)}\,(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{|x|\geq\rho_0}\frac{e^{(-\sigma+i\eta)|x-y|}}{|x-y|}f\,(y)\,dy.$$

Отсюда заключаем, что для произвольной ограниченной области $\omega \subset R_3$ можно найти такое положительное число c_ω, что $\|u_\varepsilon\|_{W_2^2(\omega)} \leq c_\omega$. Используя теоремы вложения Соболева (см., [9] или [12]), получаем ограниченности норм $\|u_\varepsilon\|_{L_2\left(S_{\rho_0}\right)}$ и $\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}\right\|_{L_2\left(S_{\rho_0}\right)}$. Тогда для точек x, принадлежащих $\{x : |x| \geq \rho_0\}$ имеет место неравенство

$$\left|u_\varepsilon^{(1)}\,(x)\right| \leq \frac{C}{|x|}, \tag{17}$$

где C не зависит от x и ε. Из (16) и (17) следует, что при $\varepsilon \to +0$ последовательность $u_\varepsilon\,(x)$ сходится к некоторой функции

$$u\,(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{R_3}\frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x-y|}}{|x-y|}f\,(y)\,dy, \tag{18}$$

равномерно в любой ограниченной подобласти $\omega \subset R_3$. По построению функция (18) является решением уравнения $\Delta u + \lambda u = -f\,(x)$. Покажем, что она удовлетворяет условию излучения Повзнера- Реллиха. Из (18), получим:

$$\frac{\partial u}{\partial\,|x|} - i\sqrt{\lambda}u = \frac{\partial}{\partial\,|x|}\frac{1}{4\pi}\int_{R_3}\frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x-y|}}{|x-y|}f\,(y)\,dy - i\sqrt{\lambda}\frac{1}{4\pi}\int_{R_3}\frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x-y|}}{|x-y|}f\,(y)\,dy. \tag{19}$$

Поскольку $f(x) \in C_0^\infty(R_3)$, то из (19) следует, что функция $u(x)$ удовлетворяет условию излучения

$$\lim_{\rho\to+\infty}\int_{S_\rho}\left|\frac{\partial u}{\partial|x|}-i\sqrt{\lambda}u\right|^2 ds=0.$$

Теперь рассмотрим общий случай, т.е. предположим, что $f(x) \in L_2(R_3)$. Так как линеал $C_0^\infty(R_3)$ плотен в $L_2(R_3)$ (см., например, [12]), то существует последовательность функций $\{f_n(x)\} \subset C_0^\infty(R_3)$, которая сходится к функции $f(x)$ в $L_2(R_3)$. Если к каждой функции $f_n(x)$ применим предыдущие процедуры, то получим, что решение

$$u_n(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{R_3}\frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x-y|}}{|x-y|}f_n(y)\,dy \tag{20}$$

уравнения $\Delta u_n+\lambda u_n=-f_n(x)$, удовлетворяющее условию

$$\lim_{\rho\to+\infty}\int_{S_\rho}\left|\frac{\partial u_n}{\partial|x|}-i\sqrt{\lambda}u_n\right|^2 ds=0,$$

есть предел решения уравнения $\Delta u_\varepsilon^n+(\lambda+i\varepsilon)\,u_\varepsilon^n=-f_n(x)$ при $\varepsilon\to+0$. Переходя в (20) к пределу при $n\to+\infty$ завершаем доказательство теоремы.

Список литературы

[1] Алиев А.Р., Эйвазов Э.Х. О существенной самосопряженности оператора Шредингера в магнитном поле // Теоретическая и математическая физика, 2011, т.166, є 2, с.266-271.

[2] Вайнберг Б.Р. О гипоэллиптических уравнениях во всем пространстве и принципе предельного поглощения // ДАН 155, є 1 (1964), с.20-23.

[3] Векуа И.Н. О доказательстве некоторых теорем единственности // ДАН 80, є 3 (1951), с.341-343.

[4] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971, 512 с.

[5] Грушин В.В. Об условиях типа Зоммерфельда для некоторого класса уравнений в частных производных // Матем. сб. 61(103):2 (1963), с.147-174.

[6] Купрадзе В.Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, М., Гостехиздат, 1950. 280 с.

[7] Повзнер А.Я. О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора $-\triangle u+cu$ // Матем.сборник, 1953, т.32(74), є1, с.109-156.

[8] Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1993, 352 с.

[9] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988, 336 с.

[10] Aliev A.R., Eyvazov E.H. On the essential spectrum of electromagnetic Schro?dinger operator with singular electric potential // Complex Variables and Elliptic Equations, 2014, v. 59, є.1, pp. 18-27.

[11] Ikebe T. Eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operators and their applications to scattering theory // Arch. Ration. Mech. and Anal., 1960, v.5, є1, pp.1-34.

[12] Lieb E.H., Loss M. Analysis, Graduate Studies in Mathematics, vol. 14, 2001,366 p.

[13] Mochizuki K. Resolvent estimates for magnetic Schrödinger operators and their applications to related evolution equations // Rend. Instit. Mat. Univ. Trieste, 2010, 42 (suppl), pp.143-164.

[14] Rellich F. Uber das asymptotische Verhalten der Losungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ // Jahresbericht der Deutsch. Maht. Ver. 53, є 1 (1943), p.57—65.

[15] Zubeldia M. Energy concentration and explicit Sommerfeld radiation condition for the electromagnetic Helmholtz equation // J. Funct. Anal., 2012, v. 263, p. 2832-2862.

N.A.Habibova
Department of Applied Mathematics, Baku State University, Z.Khalilov, 23, AZ1148 Baku, Azerbaijan
*E-mail:*niki.bdu@mail.ru

E.H.Eyvazov
Department of Applied Mathematics, Baku State University, Z.Khalilov, 23, AZ1148 Baku, Azerbaijan;
*Department of Mathematics, Baku Engineering University / Khirdalan city,Hasan Aliyev str. 120,Baku,Absheron,AZ0101, Azerbaijan E-mail:*eyvazovelshad@mail.ru

Received
Accepted