Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 4, No 2, 2014, December
ISSN 2222-5498

Оптимальное распределение земельного участка

Х. Дж. Эфендиева

Аннотация. Рассматривается распределение земельного участка между производителями так, чтобы общая прибыль была бы максимальной. Строится математическая модель рассмотренной экономической задачи. Далее эта задача, дискретизируясь, приводится к задаче целочисленные программирование.

Ключевые слова: математическая модель, дискретизация, оптимизация, максимальная прибыль, целочисленное программирование.

2000 Mathematics Subject Classifications: 65K10, 90C05

1. Введение

Оптимальное распределение ресурсов - такое распределение ресурсов, которое обеспечивает наилучшее, наиболее эффективное их использование. Основой оптимального распределения ресурсов является их ограниченность, что требует их использования (соответственно распределения) с учетом критерия оптимальности. Проблема оптимального распределения ресурсов решается с помощью экономико-математических моделей (линейного и нелинейного программирования и т. д.). При этом все экономико-математические модели направлены на то, чтобы обеспечить минимум затрат, либо максимум эффекта при ограничениях по объему ресурсов и потребностей в них.

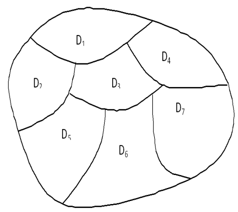
В данной работе рассматривается распределение земельного участка между производителями так, чтобы общая прибыль была бы максимальной. Строится математическая модель рассмотренной экономической задачи. Далее это задача, дискретизируясь, приводится к задаче целочисленному программированию.

Рассмотренная в работе задача экономически также интерпретируется как игровая задача о дележе неоднородного пирога по утилитарному принципу.

2. Постановка задачи

Пусть n производителей хотят осуществить свою цель, используя при этом все производительные участки, которые окружают область $D \subset R^2$. Допустим, что дана площадь использованного участка каждого участника и эти площади обозначены, соответственно, через $C_1, C_2, ..., C_n$. Обозначим через $f_k(x)$, $x \in D$, функцию, которая характеризирует показатель значительности по области D_k-го участника. Если по области D функция $f_k(x)$ для каждого k постоянная, то задача называется однородной.

Если в подмножестве $D_0 \subset D f_k(x) = 0$, то это означает, что использование области D_0 не дает никакой пользы $k-$му участнику.



Допустим, что k-ый участник использует D_k, тогда его производительный объем (прибыль) выражается следующей величиной:

$$J_k(D_k) = \int_{D_k} f_k(x)dx, \ \ k = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Здесь цель состоит в том, что распределить участок D между n производителями так, чтобы их общая прибыль была бы максимальной. Эту задачу математически можно записать следующим образом:

$$J(D_1, D_2, ..., D_n) = \sum_{k=1}^{n} \int_{D_k} f_k(x)dx \to \max, \tag{2}$$

$$mes\, D_k = C_k \quad k = \overline{1,n}, \tag{3}$$

$$\bigcup_{k=1}^{n} D_i = D, \quad D_i \bigcap D_j = \emptyset, \quad i \neq j. \tag{4}$$

Здесь $mes\, D_k$ площадь области D_k. Ясно, что условие $mes\, D_k = C_k$ можно записать следующим образом:

$$\int_{D_k} dx = C_k \ , \ \ k = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Условие $D_i \bigcap D_j = \emptyset$, $i \neq j$, экономически показывает, что разные участники не могут использовать один и тот же участок.

Обозначим через K совокупность множеств $d = (D_1, D_2, ..., D_n)$, которые определяются из выражения (4). Другими словами,

$$K = \{d = (D_1, D_2, ..., D_n) : D_i \subset R^2, \ \bigcup_{i=1}^{n} D_i = D, \quad D_i \bigcap D_j = \emptyset, \quad i \neq j\}.$$

Таким образом, здесь целью является найти такую совокупность $d = (D_1, D_2, ..., D_n) \in K$, которая удовлетворяя условию (3) или (5), дала бы функционалу (2) максимальное значение.

Как видно, рассмотренная задача является задачей нахождения экстремума функционала, который зависит от области. Исследование таких задач, с математической точки зрения, связано со многими трудностями [1]. В случае, когда области $D_1, D_2, ..., D_n$ выпуклые, предлагаемый в работе [3,4] подход можно применить для изучения задачи (2)-(4). Однако, с точки зрения практики, условие выпуклости областей $D_1, D_2, ..., D_n$ является жестким условием. Поэтому для решения поставленной задачи применим другой подход. В этом подходе мы не будем требовать выпуклости участка каждого участника.

Замечание. Ясно, что поставленную задачу экономически можно по другому интерпретировать. Например, предприятие, осуществляющее n число производство, как должно использовать данный конкретный участок, чтобы добывать максимальную прибыль.

3. Дискретизация задачи. Приведение ее к задаче целочисленного программирования

Дискретизируя данную область D с малым шагом $h > 0$, заменим ее равномерной сеткой $D(h)$. Обозначим через d_{ij} маленький квадрат, соответствующий $i-$строке и $j-$столбцу. Обозначим через S такую совокупность индексов (i, j), $i \in N$, $j \in N$, чтобы $d_{ij} \in S$. Другими словами,

$$S = \{(i, j) : d_{ij} \in D(h), \ i \in N, \ j \in N \}. \tag{6}$$

Не нарушая общности, можно предполагать, что $mesD = mesD(h)$.

Возьмем любую точку $x \in d_{ij}$ и примем $f_{ij}^{(k)} = f_k(x)$. Обозначим через $D_k(h)$ участок сетки, который будет использовать $k-$ый участник. Допустим, что шаг h выбран таким образом, что числа $\frac{c_k}{h^2}$, ($k = \overline{1, n}$)- натуральные . Ясно, что функционал (1) можно записать следующим образом:

$$J_k(D_k) = \int_D f_k(x) H_k(x) dx, \ \ k = \overline{1, n}.$$

Здесь

$$H_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in D_k, \\ 0, & x \notin D_k. \end{cases}$$

Примем следующие обозначения:

$$Z_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1, \text{ если } \quad d_{ij} \subset D_k(h), \\ 0, \quad \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{7}$$

Тогда дискретный аналог функционала (1) можно записать в виде:

$$J_k = h^2 \sum_{(i,j)\in S} f_{ij}^{(k)} z_{ij}^{(k)}. \tag{8}$$

Ясно, что должны выполняться следующие условия:

$$mesD_k(h) = c_k, \bigcup_{k=1}^{n} D_k(h) = D(h), \qquad D_k(h) \bigcap D_p(h) = \emptyset, \quad k \neq p.$$

Учитывая обозначения (7), условие $mesD_k(h) = c_k$ можно записать в такой форме:

$$h^2 \sum_{(i,j)\in S} z_{ij}^{(k)} = c_k.$$

А условие (4) в дискретной форме может быть в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} z_{ij}^{(k)} = 1, (i,j) \in S.$$

Другими словами из квадрата d_{ij} может использовать лишь один участник.

Таким образом, мы получаем следующий дискретный аналог задачи (2)-(4):

$$J(z) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{(i,j)\in S} f_{ij}^{(k)} z_{ij}^{(k)} \to \max, \tag{9}$$

$$\sum_{(i,j)\in S} z_{ij}^{(k)} = \overline{c_k}, \qquad k = \overline{1,n}, \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{n} z_{ij}^{(k)} = 1, \quad (i,j) \in S, \tag{11}$$

$$z_{ij}^{(k)} \in \{0;1\}, \ \ k = \overline{1,n}\,, \ (i,j) \in S, \tag{12}$$

где $\bar{c}_k = \frac{c_k}{h}$.

Отсюда видно, что задача (9)-(12) является задачей целочисленного линейного программирования. Чтобы решить эту задачу можно использовать программный пакет "МАТЛАБ".

Предположим, что решая задачу (9)-(12), найдены переменные $z_{ij}^{(k)}$, $k = \overline{1,n}\,, (i,j) \in S$. Тогда использованный участок каждого участника найдется следующим образом:

$$D_k = \left\{ d_{ij} : z_{ij}^{(k)} = 1,\ (i,j) \in S \right\}. \tag{13}$$

Как видно из условия (13) квадрат d_{ij} может принадлежать лишь одной из сеток $D_k(h)$, $k = \overline{1,n}$.

Замечание. Для решения рассмотренной непрерывной задачи мы сводим эту задачу к дискретной задаче (9)-(12). Для этого рассмотренная задача дискретизирована с малым шагом h. Нужно заметить, что поставленную задачу в ее первоначальной постановке можно было задавать и в дискретной форме. В этом случае, не так важно требовать от стороны h квадратов ее малости, которые образуют сетку. В такой постановке требуется сетку $D(h)$ так распределить между n участниками, чтобы приобрести максимальную прибыль. В каждом квадрате d_{ij} заранее даны величины $f_{ij}^{(k)}$, $k = \overline{1,n}$, которые характеризуют показатели значимости $k-$го участника.

Список литературы

[1] *Sokolowski J., Zolesio J.-P.* Introduction to shape optimization. Shape Sensitivity Analysis, Springer, Heidelberg, 1992, 592 p.

[2] *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциального исчисления. М.: Наука, 1990, 400 с.

[3] *Нифтиев А.А., Гасымов Ю.С.* Управление границами и задачи на собственные значения с переменной областью. Баку, изд. БГУ, 2004, 185 с.

[4] *Нифтиев А.А., Ахмедов Э.Р.* Вариационная постановка обратной задачи относительно области. Дифференциальная уравнения. 2007, т. 43, No. 10, с. 1410-1416.

[5] *Moulin H.* Axioms of Cooperative Decision Making Cambridge Univ. Press, 1988, 483 p.

[6] *Laruelle A. and Valenciano F.* Voting and collective decision making Cambridge Univ.Press, 2008, 512 p.

[7] *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 518 с.

Х. Дж. Эфендиева
Бакинский Государственный Университет,
ул. З.Халилова, 23, Az 1148, Баку, Азербайджан
E-mail: rasyl1@rambler.ru

Received 02 November 2014
Accepted 24 November 2014