Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 4, No 1, 2014, September
ISSN 2222-5498

Преобразование Лапласа-Стильтьеса распределения момента первого пересечения уровня $a\,(a>0)$ процессом полумарковского блуждания с положительным сносом отрицательными скачками и задерживающим экраном в нуле

У. Я. Керимова

Аннотация. Пользуясь последовательностью независимых одинаково распределенных двумерных случайных величин строится процесс полумарковского блуждания с положительным сносом, отрицательными скачками. Находится преобразование Лапласа-Стильтьеса распределения первого момента пересечения уровня a $(a>0)$.

Key Words and Phrases: случайная величина, процесс полумарковского блуждания, преобразование Лапласа-Стильтьеса.

2000 Mathematics Subject Classifications: 60A10, 60J25, 60G50

1. Введение

В работе [1, с. 24–39] в нахождении распределений процесса и его основных граничных функционалов пользовались асимптотическим методом. В [2, с. 83] найдено преобразование Лапласа распределения первого момента достижения задерживающего экрана в нуле процессом полумарковского блуждания. В работе [3, с. 257-268] и [4, с. 26-51] исследовано асимптотическое поведение первого момента пересечения некоторого уровня процессом полумарковского блуждания. В [5, с. 61-63] изучено асимптотическое поведение момента достижения заданного уровня невозвратным одномерным случайным блужданием в случайной среде с задерживающим экраном в нуле, скачки которого принимают три значения: -1, 0, +1.

В данной работе найдены преобразование распределения Лапласа-Стильтьеса момента первого пересечения уровня $a\,(a>0)$ и его первые вторые моменты.

2. Математическое описание задачи

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega,\, F,\, P\,(\cdot))$ задана последовательность $\{\xi_k,\, \zeta_k\}_{k=\overline{1,\infty}}$ независимых, одинаково распределенных и положительных случайных величин ξ_kи ζ_k, $k \geq 1$.

Пользуясь последовательностью $\{\xi_k,\, \zeta_k\}_{k=\overline{1,\infty}}$, построим процесс полумарковского блуждания
$X_1\,(t) = z + t - \sum_{i=1}^{k-1} \zeta_i$, если $\sum_{i=1}^{k-1} \xi_i \leq t < \sum_{i=1}^{k} \xi_i,\ k \geq 1$,
где $z = X_1\,(0) > 0$.

Процесс $X_1\,(t)$ называется процессом полумарковского блуждания с положительным сносом и отрицательными скачками.

Этот процесс задержим экраном в нуле $x(t) = x_1(t) - \inf\limits_{0\leq s\leq t}(0, x(s)), x(t)$ есть процесс с положительным сносом, отрицательными скачками и задерживающим экраном в нуле.

Наша цель найти явный вид преобразования Лапласа–Стильтьеса распределения момента первого пересечения уровня $a\,(a > 0)$ процессом $X\,(t)$.

3. Составление интегрального уравнения для преобразования Лапласа- Стильтьеса

Обозначим через τ_a момент первого пересечения уровня $a\,(a > 0)$ процессом $X\,(t)$:

$$\tau_a = \inf\{t:\ X\,(t)\ \geq\ a\}$$

и

$$L(\theta\,|z\,) = E(e^{-\theta\tau_a}\,|X(0) = z\,),\ \theta > 0.$$

Покажем, что если ξ_k и ζ_k, $k \geq 1$ независимы, ξ_k, $k \geq 1$, независимы между собою и также ζ_k, $k \geq 1$, независимы между собою, то $L(\theta\,|z\,)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$L(\theta\,|z\,) = e^{-\theta\,(a-z)} P\,\{\xi_1 > a - z\} +$$

$$+ \int_{t=0}^{a-z} e^{-\theta\,t} \int_{y=-\infty}^{z+t} L\,(\theta\,|y\,)\, d_y P\,\{\zeta_1 < z + t - y\}\, d_t\, P\,\{\xi_1 < t\}\,. \tag{1}$$

Очевидно, что

$$\tau_a = \begin{cases} a - z & , \text{ если } \quad z + \xi_1 > a, \\ \xi_1 + T, & \text{ если } \quad z + \xi_1 < a. \end{cases} \tag{2}$$

где $T \overset{d}{=} \tau_a$. Так как τ_a - первый момент пересечения уровня a процессом $X\,(t)$, если он выходит из точки z, то T- первый момент пересечения уровня a , если он выходит из точки $z + \xi_1 - \zeta_1$.

Тогда, воспользовавшись (2), имеем:

$$L(\theta\,|z\,) = E(e^{-\theta\tau)}\,|X(0) = z\,) = \int_\Omega e^{-\theta\tau_a} P(d\omega) =$$

$$= \int_{z+\xi_1>a} e^{-\theta\,(a-z)} P(d\omega) + \int_{z+\xi_1<a} e^{-\theta(\xi_1+T)} P\left\{d\omega\,|X(0) = \max(0, z+\xi_1-\zeta_1)\right\}.$$

Подставив во втором слагаемом

$$\xi_1(\omega) = t,\ \ \zeta_1(\omega) = y,\ T(\omega) = x,$$

из последнего уравнения имеем:

$$L(\theta\,|z\,) = e^{-\theta\,(a-z)} P\left\{\xi_1 > a-z\right\} +$$

$$+ \int_{t=0}^{a-z} \int_{y=0}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} e^{-\theta(t+x)} d_x P\left\{T < x\,|z+t-y\right\} d_t P\left\{\xi_1 < t\right\} d_y\, P\left\{\zeta_1 < y\right\}.$$

Получим интегральное уравнение для $L(\theta\,|z\,)$:

$$L(\theta\,|z\,) = e^{-\theta\,(a-z)} P\left\{\xi_1 > a-z\right\} + L(\theta|0) \int_{t=0}^{a-z} e^{-\theta\,\mathrm{t}} \int_{y=z+t}^{\infty} d_y P\left\{\zeta_1 < y\right\} d_t P\left\{\xi_1 < t\right\} -$$

$$- \int_{t=0}^{a-z} e^{-\theta\,t} \int_{y=0}^{z+t} L(\theta\,|z+t-y\,) d_y\, P\left\{\zeta_1 < y\right\} d_t P\left\{\xi_1 < t\right\}.$$

Если в последнем интеграле сделать замену переменных $u = z+t-y$, то получим

$$L(\theta\,|z\,) = e^{-\theta\,(a-z)} P\left\{\xi_1 > a-z\right\} + L(\theta|0) \int_{t=0}^{a-z} e^{-\theta\,\mathrm{t}} \int_{y=z+t}^{\infty} d_y P\left\{\zeta_1 < y\right\} d_t P\left\{\xi_1 < t\right\} -$$

$$- \int_{t=0}^{a-z} e^{-\theta\,t} \int_{u=z+t}^{0} L(\theta\,|u\,) d_u\, P\left\{\zeta_1 < z+t-u\right\} d_t P\left\{\xi_1 < t\right\}.$$

Это интегральное уравнение можно решить методом последовательных приближений. Но полученное значение непригодно для приложений. Поэтому мы, сузив класс блужданий, получим явный вид решения (1).

В случае, когда случайные величины ξ_1 и ξ_2 имеют экспоненциальное распределение с параметрами μ и λ, соответственно,

$$\begin{array}{l} P\left\{\xi_1 < t\right\} = \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \varepsilon\,(t)\,,\ \lambda > 0,\ t > 0, \\ P\left\{\zeta_1 < t\right\} = \left(1 - e^{-\mu t}\right) \varepsilon\,(t)\,,\ \mu > 0,\ t > 0, \\ \varepsilon\,(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0, \end{cases} \end{array} \tag{3}$$

интегральное уравнение (1) примет вид

$$L(\theta\,|z\,) = e^{-(\lambda+\theta)a} e^{(\lambda+\theta)z} + \frac{\lambda e^{-\mu\,\mathrm{z}}}{\lambda+\mu+\theta} L(\theta|0) - \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\theta} e^{-(\lambda+\mu+\theta)a}\, \mathrm{e}^{(\lambda+\theta)\mathrm{z}} L(\theta|0) +$$

$$+ \lambda\mu e^{-\mu\,z} \int_{t=0}^{a-z} e^{-(\lambda+\mu+\theta)t} \int_{y=z+t}^{0} e^{\mu\,y} L(\theta\,|y\,) dy\, dt \tag{4}$$

Из этого интегрального уравнения можем получить обыкновенное дифференциальное уравнение. Действительно, обе части (4) умножаем на $e^{\lambda z}$ и продифференцируем по z . Далее обе части полученного уравнения умножаем на $e^{-(\lambda+\mu+\theta)z}$ и продифференцируем по z. Тогда получим следующее дифференциальное уравнение:

$$L''_z\,(\theta\,|z\,) - (\lambda - \mu + \theta)\;\; L'_z\,(\theta\,|z\,) - \mu\theta\, L\,(\theta\,|z\,) = 0. \tag{5}$$

4. Решение дифференциального уравнения

Общее решение дифференциального уравнения (5) будет

$$L\,(\theta\,|z\,) = c_1\,(\theta)\; e^{k_1(\theta)z} + c_2\,(\theta)\; e^{k_2(\theta)z}, \tag{6}$$

где $k_1\,(\theta)$ и $k_2\,(\theta)$ корни характеристического уравнения

$$k^2\,(\theta) - (\lambda - \mu + \theta)\;\; k\,(\theta) - \mu\theta = 0, \tag{7}$$

соответствующего (5). Коэффициенты $c_i(\theta,\alpha), i = 1,2$ находятся из следующих граничных условий, полученных из интегрального уравнения (4):

$$\begin{cases} L\,(\theta\,|0\,) = e^{-(\lambda+\theta)a} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\theta}L(\theta|0) - \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\theta}e^{-(\lambda+\mu+\theta)a}L(\theta|0) + \\ \qquad\qquad + \lambda\mu\int_{t=0}^{a} e^{-(\lambda+\mu+\theta)t}\int_{y=t}^{0} e^{\mu y}L\,(\theta\,|y\,)\,dy\,dt, \\ L'_z\,(\theta\,|0\,) = (\lambda+\mu+\theta)e^{-(\lambda+\theta)a} - \mu\,L\,(\theta\,|0\,) - \lambda e^{-(\lambda+\mu+\theta)a}L(\theta|0) - \\ \qquad\qquad -\lambda\mu e^{-(\lambda+\mu+\theta)a}\int_{y=a}^{0} e^{\mu y}L\,(\theta\,|y\,)\,dy + \\ \qquad\qquad\qquad - \lambda\mu\int_{y=0}^{a} e^{-(\lambda+\theta)\,y}\,L\,(\theta\,|y\,)\,dy. \end{cases} \tag{8}$$

В обеих частях (8) вместо $L\,(\theta\,|0\,)$ и $L\,(\theta\,|y\,)$ подставим их значения (6). Если раскрыть интегралы и перенести выражения в левую часть, получим, что

$$\left\{\frac{\lambda\mu + \mu\theta - \mu\,k_1(\theta) + \lambda\,k_1(\theta) + \theta\,k_1(\theta) - k_1^2(\theta) - \lambda\mu}{[\lambda+\theta-k_1(\theta)]\,[\mu+k_1(\theta)]} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda\mu}{[\lambda+\theta-k_1(\theta)]\,[\mu+k_1(\theta)]}e^{-[\lambda+\theta-k_1(\theta)]a}\right\} c_1\,(\theta) +$$

$$\left\{\frac{\lambda\mu + \mu\theta - \mu\,k_2(\theta) + \lambda\,k_2(\theta) + \theta\,k_2(\theta) - k_2^2(\theta) - \lambda\mu}{[\lambda+\theta-k_2(\theta)]\,[\mu+k_2(\theta)]} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda\mu}{[\lambda+\theta-k_2(\theta)]\,[\mu+k_2(\theta)]}e^{-[\lambda+\theta-k_2(\theta)]\,a}\right\} c_2\,(\theta) = e^{-(\lambda+\theta)a}. \tag{9}$$

Первые члены в фигурных скобках нули, т.к. согласно (7)

$$k_i^2\,(\theta) - (\lambda - \mu + \theta)\,k_i\,(\theta) - \mu\theta = 0\;, i = 1,2. \tag{10}$$

Далее ввиду того что,

$$[\lambda+\theta-k_i(\theta)]\,[\mu+k_i(\theta)] = \lambda\mu,$$

из (10) получаем, что

$$e^{ak_1(\theta)}c_1(\theta)+e^{ak_2(\theta)}c_2(\theta)=1.$$

Теперь из второго граничного условия найдем $c_1(\theta)$ и $c_2(\theta)$.

Легко видеть, что
$c_1(\theta)=e^{-ak_1(\theta)}$, $c_2(\theta)=0$, либо $c_1(\theta)=0$, $c_2(\theta)=e^{-ak_1(\theta)}$.
Из (6) и (9) получим, что

$$k_1(\theta)c_1(\theta)\ +k_2(\theta)c_2(\theta)=-\mu\left[c_1(\theta)\ +c_2(\theta)\right]+(\lambda+\mu+\theta)e^{-(\lambda+\theta)a}-$$
$$-\lambda\mu e^{-(\lambda+\mu+\theta)a}\int_{y=-\infty}^{a}e^{\mu y}\left[e^{k_1(\theta)y}c_1(\theta)+e^{k_2(\theta)y}c_2(\theta)\right]dy+$$
$$+\lambda\mu\int_{u=0}^{a}e^{-(\lambda+\theta)u}\left[e^{k_1(\theta)u}c_1(\theta)+e^{k_2(\theta)u}c_2(\theta)\right]du. \tag{11}$$

После интегрирования имеем:

$$\sum_{i=1}^{2}\left[\mu+k_i(\theta)\right]c_i(\theta)\ =(\lambda+\mu+\theta)e^{-(\lambda+\theta)a}-$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\frac{\lambda\mu}{\left[\mu+k_i(\theta)\right]}e^{-[\lambda+\theta-k_i(\theta)]a}c_i(\theta)+\sum_{i=1}^{2}\frac{\lambda\mu}{\left[\lambda+\theta-k_i(\theta)\right]}\left[1-e^{-[\lambda+\theta-k_i(\theta)]a}\right]c_i(\theta). \tag{12}$$

Откуда получим алгебраическое уравнение относительно $c_1(\theta)$ и $c_2(\theta)$.

В (12), учитывая, что $[\lambda+\theta-k_i(\theta)]\left[\mu+k_i(\theta)\right]=\lambda\mu$, получим, что

$$\sum_{i=1}^{2}\left\{\mu+k_i(\theta)+[\lambda+\theta-k_i(\theta)]\,e^{-[\lambda+\theta-k_i(\theta)]a}-\left[\mu+k_i(\theta)\right]\left[1-e^{-[\lambda+\theta-k_i(\theta)]a}\right]\right\}c_i(\theta)=$$

$$=(\lambda+\mu+\theta)e^{-(\lambda+\theta)a}. \tag{13}$$

Наконец-то, из (13) имеем

$$e^{ak_1(\theta)}c_1(\theta)+e^{ak_2(\theta)}c_2(\theta)=1.$$

Значит, система алгебраических уравнений относительно $c_1(\theta)$ и $c_2(\theta)$, состоящая из (9) и (11), сводится к системе

$$\begin{cases} e^{ak_1(\theta)}c_1(\theta)+e^{ak_2(\theta)}c_2(\theta)=1,\\ e^{ak_1(\theta)}c_1(\theta)+e^{ak_2(\theta)}c_2(\theta)=1.\end{cases}$$

Эта система линейно зависима. Поэтому $c_1(\theta)$ и $c_2(\theta)$ определим из уравнения

$$e^{ak_1(\theta)}c_1(\theta)+e^{ak_2(\theta)}c_2(\theta)=1.$$

Это уравнение будет иметь место, тогда и только тогда, когда $c_1(\theta) = e^{-ak_1(\theta)}$, $c_2(\theta) = 0$ или наоборот. Тогда имеем

$$L(\theta\,|z) = e^{-(a-z)k_1(\theta)}. \tag{14}$$

Из (10) находим, что

$$k_1(\theta) = \frac{(\lambda-\mu+\theta)+\sqrt{(\lambda-\mu+\theta)^2+4\mu\theta}}{2},$$

$$k_2(\theta) = \frac{(\lambda-\mu+\theta)-\sqrt{(\lambda-\mu+\theta)^2+4\mu\theta}}{2},$$

$$k_1(0) = \frac{(\lambda-\mu)+|\lambda-\mu|}{2} = \begin{cases} 0, & \lambda<\mu, \\ \lambda-\mu, & \lambda>\mu, \end{cases}$$

$$k_2(0) = \frac{(\lambda-\mu)-|\lambda-\mu|}{2} = \begin{cases} 0, & \lambda>\mu, \\ \lambda-\mu, & \lambda<\mu. \end{cases}$$

Чтобы процесс $X(t)$ пересекал уровень a должно быть $E\xi_1 > E\zeta_1$ или $\lambda < \mu$. Чтобы $L(0\,|z) = 1$ должны взять $k_1(0) = 0$.

Если $\lambda = \mu$, то процесс $X(t)$ бесконечно будет колебаться вокруг некоторого состояния и не пересечет уровень $a\,(a>0)$.

Теперь, воспользовавшись формулой (14), найдем условное математическое ожидание и дисперсию случайной величины τ_a.

Из (14) получим, что

$$L'(0\mid z) = -(a-z)\,k_1'(0)\,,$$

$$L''(0\mid z) = -(a-z)\,k_1''(0) + (a-z)^2\left[k_1'(0)\right]^2.$$

Если учитывать, что

$$k_1'(0) = -\frac{\mu}{\lambda-\mu}, k_1''(0) = \frac{2\lambda\mu}{(\lambda-\mu)^3},$$

то получим

$$L'(0\mid z) = \frac{\mu}{\lambda-\mu}\,(a-z)\,,$$

$$L''(0\mid z) = -\frac{2\lambda\,\mu}{(\lambda-\mu)^3}\,(a-z) + \frac{\mu^2}{(\lambda-\mu)^2}\,(a-z)^2\,.$$

Используя свойство преобразования Лапласа-Стильтьеса для случайной величины τ_a, при $\lambda<\mu$ получим:

$$E(\,\tau_a\mid X(0)=z) = -\frac{\mu}{\lambda-\mu}\,(a-z)\,,$$

$$D(\,\tau_a\mid X(0)=z) = -\frac{2\lambda\,\mu}{(\lambda-\mu)^3}\,(a-z)\,.$$

5. Заключение

$P\{\tau_a < t\,|X(0) = z\}$ есть нечто иное условное распределение момента первого пересечения некоторого уровня $a\,(a > 0)$ системой управления запасами с задалживанием спроса, с помощью которого находим математическое ожидание и дисперсию момента первого пересечения уровня $a\,(a > 0)$.

Список литературы

[1] Borovkov A.A. On the asymptotic behavior of the distributions of first-passage // Mat. Zametki, 2004, v. 75, no. 1, pp. 24–39.

[2] Nasirova N.I., Ibayev E.A., Aliyeva T.A. The Laplace transformation of the distribution of the first moment reaching the positive delaying screen with the semi-markovian process / International Conference Modern problems and new trends in probability theory, Chernivtsi, Ukraine, June 19-26, 2005, pp. 45-46.

[3] Khaniev T.A., Unver I. The study of the level zero crossing time of a semi-markovian random walk with delaying screen // Turkish Journal of Mathematics, 1997, v. 21, no. 3, pp.257-268.

[4] Lotov V.I. On the asymptotics of distributions in two-sided boundary problems for random walks defined on a Markov chain // Sib. Adv. Math., 1991, v. 1, no. 2, pp.26-51.

[5] Бусаров В.А. Об асимптотическом поведении случайных блужданий в случайной среде с задерживающим экраном // Вестик МГУ, сер. 1, 2004, No 5, с. 61-63.

У.Я. Керимова
Институт Систем Управления НАН Азербайджана
E-mail: ulviyye_kerimova@yahoo.com

Received 20 July 2014
Accepted 25 August 2014