Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 8, No 1, 2018, July
ISSN 2222-5498

Об оценке нормы промежуточных производных через норму операторно-дифференциального выражения третьего порядка квазиэллиптического типа

А.Т. Газилова

Аннотация. В работе получены точные значения нормы операторов промежуточных производных через нормы некоторых операторно-дифференциальных выражений третьего порядка квазиэллиптического типа.

Ключевые слова: Гильбертово пространство, промежуточные производные, операторные дифференциальные уравнения, эквивалентные номы.

Теорема 1. Нормы $\|u\|_{W_2^3(R;H)}$ и $\|P_0\left(d/dt;\, A\right)u\|_{L_2(R;H)}$ эквивалентны.

Доказательство. Очевидно, что уравнение имеет только нулевое решение из пространства $W_2^3\left(R;H\right)$. С другой стороны при любом $f\left(t\right) \in L_2\left(R;H\right)$ уравнение $P_0\left(d/dt;\, A\right)u = f$имеет решение

$$u\left(t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(i\xi + A\right)^{-1}\left(i\xi - A\right)^{-2}\hat{f}\left(\xi\right)e^{i\xi t}d\xi,\ t \in R,$$

где $\hat{f}\left(\xi\right)$ есть преобразование Фурье функций $f\left(t\right)$. Покажем, что $u \in W_2^3\left(R;H\right)$. По теореме Планшареля достаточно доказать что, $A^3\hat{u}\left(\xi\right) \in L_2\left(R;H\right)$, $\xi^3\hat{u}\left(\xi\right) \in L_2\left(R;H\right)$, где $\hat{u}\left(\xi\right)$ есть преобразование Фурье функции $u\left(t\right)$.

Так как

$$\left\|A^3\hat{u}\left(\xi\right)\right\|_{L_2(R;H)} = \left\|A^3\left(i\xi + A\right)^{-1}\left(i\xi - A\right)^{-2}\hat{f}\left(\xi\right)\right\|_{L_2(R;H)} \leq$$

$$\leq \sup_{\xi\in R}\left\|A^3\left(i\xi + A\right)^{-1}\left(i\xi - A\right)^{-2}\right\|_{L_2(R;H)}\left\|\hat{f}\left(\xi\right)\right\|_{L_2(R;H)} \qquad (1)$$

и по спектральной теореме для самосопряженных операторов при любом $\xi \in R$ имеет место неравенство

$$\left\|A^3\left(i\xi + A\right)^{-1}\left(i\xi - A\right)^{-2}\hat{f}\left(\xi\right)\right\| =$$

 © 2011 JCAM All rights reserved.

$$= \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left| \mu^3 (i\xi + \mu)^{-1} (i\xi - \mu)^{-2} \right|,$$

то из неравенства (1) следует, что $A^3 \hat{u}(\xi) \in L_2(R; H)$. Аналогично доказывается, что . Следовательно, $u(t) \in W_2^3(R; H)$. Так как по теореме о промежуточных производных

$$\|P_0 (d/dt : A) u\|_{L_2(R;H)} \leq const \|u\|_{W_2^3(R;H)},$$

то из теоремы Банаха об обратном операторе следует, что

$$\|u\|_{W_2^3(R;H)} \leq \|P_0 (d/dt : A) u\|_{L_2(R;H)}.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы и теоремы о промежуточных производных [1]. Следует, что конечны нормы

$$N_j(R) = \sup_{0 \neq u \in W_2^3(R;H)} \left\| A^{3-j} u^{(j)} \right\|_{L_2(R;H)} \|P_0 (d/dt : A) u\|_{L_2(R;H)}^{-1}, \ \ j = 1, 2 \qquad (2)$$

Для нахождения точных значений $N_j(R)$ сперва докажем следующую важную теорему

Теорема 2. Пусть. Тогда полиномиальные операторные пучки

$$S_j(\lambda; \beta; A) = P_0(\lambda; A) P_0(-\lambda; A) - \beta (i\lambda)^{2j} A^{6-2j}, \ \ j = 1, 2$$

представляются в виде

$$S_j(\lambda; \beta; A) = T_j(\lambda; \beta; A) T_j(-\lambda; \beta; A) \qquad (3)$$

причем

$$T_j(\lambda; \beta; A) = \prod_{l=1}^{3} (\lambda E - \omega_{jl}(\beta) A), \ \ Re\omega_{jl}(\beta) < 0, \ l = \overline{1, 3}, \ \ j = 1, 2.$$

Доказательство. Пусть $\mu \in \tau(A)$, где $\tau(A)$ есть спектр оператора A. Тогда числовой полином $S_j(\lambda; \beta; A)$ при $\beta \in [0, 27/4)$ и не имеет корень из мнимой оси. Действительно, при $\lambda = i\xi, \ \xi \in R$.

$$S_j(i\xi; \beta; \mu) = \left(\xi^2 + \mu^2\right)^3 - \beta \xi^{2j} \mu^{6-2j} =$$

$$= \left(\xi^2 + \mu^2\right)^3 \left(1 - \beta \frac{\xi^{2j} \mu^{6-2j}}{\left(\xi^2 + \mu^2\right)^3}\right) =$$

$$= \left(\xi^2 + \mu^2\right)^3 \left(1 - \beta \frac{(\xi/\mu)^{2j}}{\left(1 + (\xi/\mu)^2\right)^3}\right) \geq$$

$$\geq \left(\xi^2+\mu^2\right)^3 \left(1-\beta \sup_{\tau>0} \frac{\tau^{2j}}{\left(1+\tau^2\right)^3}\right) \geq$$

$$(\tau=\xi/\mu).$$

Из вида $S_j\left(\lambda;\beta;A\right)$ видно, что он имеет три корней из левой полуплоскости и три корней из правой полуплоскости. Тогда обозначим через

$$T_j\left(\lambda;\beta;\mu\right)=\prod_{l=1}^{3}\left(\lambda E-\omega_{jl}\left(\beta\right)\mu\right),\ \ Re\omega_{jl}\left(\beta\right)<0,\ l=\overline{1,\,3},\quad j=1,\,2.$$

Так как коэффициенты полинома $S_j\left(\lambda;\beta;\mu\right)$ действительны и $S_j\left(\lambda;\beta;A\right) = S_j\left(-\lambda;\beta;A\right)$, то корни $S_j\left(\lambda;\beta;\mu\right)$ симметричны относительно действительной оси и начало координат. Поэтому при $\beta\in[0,\,27/4)$

$$S_j\left(\lambda;\beta;\mu\right)=T_j\left(\lambda;\beta;\mu\right)T_j\left(-\lambda;\beta;\mu\right). \tag{4}$$

Далее, используя спектральное разложение оператора A из равенства (4) получаем верность равенства (3).
Теорема доказана.

Замечание 1. Легко видеть, что при любом $\varepsilon>0$ можно найти ξ_0 такое, что $S_j\left(i\xi_0;\beta+\varepsilon;\mu\right)<0$. Действительно, достаточно взять $\xi_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\mu$, при $j=1$ и $\xi_0=\sqrt{2}\mu$ при $j=2$. Используя представление (3) доказывается следующая важная

Теорема 3. При $\beta\in[0,\,27/4)$ и $u\in W_2^3\left(R;H\right)$ имеет место равенство

$$\left\|T_j\left(d/dt;\beta;A\right)u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}=\left\|P_0\left(d/dt;A\right)u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}-\beta\left\|A^{3-j}u^{(j)}\right\|^2_{L_2(R_+;H)},\ \ j=1,\,2. \tag{5}$$

Доказательство. Так как $D\left(R;H\right)$ плотно в $W_2^3\left(R;H\right)$ равенство (4) достаточно доказать для функций из $D\left(R;H\right)$. Пусть $u\in D\left(R;H\right)$. Тогда из теоремы Планшареля получаем, что

$$\left\|T_j\left(d/dt;\beta;A\right)u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}=\left\|T_j\left(i\xi;\beta;A\right)\hat{u}\left(\xi\right)\right\|^2_{L_2(R_+;H)}=$$

$$=\left(T_j\left(i\xi;\beta;A\right)\hat{u}\left(\xi\right),T_j\left(i\xi;\beta;A\right)\hat{u}\left(\xi\right)\right)_{L_2(R_+;H)}=$$

$$=\left(T_j\left(i\xi;\beta;A\right)T_j\left(-i\xi;\beta;A\right)\hat{u}\left(\xi\right),\hat{u}\left(\xi\right)\right)_{L_2(R_+;H)}=$$

$$=\left(S_j\left(i\xi;\beta;A\right)\hat{u}\left(\xi\right),\hat{u}\left(\xi\right)\right)_{L_2(R_+;H)}=$$

$$=\left(P_0\left(i\xi;\beta;A\right)P_0\left(-i\xi;\beta;A\right)\hat{u}\left(\xi\right)-\beta\xi^{2j}A^{6-2j}\hat{u}\left(\xi\right),\hat{u}\left(\xi\right)\right)=$$

$$= \left\| P_0\left(i\xi;\beta;A\right)\hat{u}\left(\xi\right)\right\|^2_{L_2(R;H)} - \beta\left\| A^{3-j}\hat{u}\left(\xi\right)\right\|^2_{L_2(R;H)} =$$

$$= \left\| P_0\left(d/dt;\beta;A\right)\hat{u}\left(\xi\right)\right\|^2_{L_2(R;H)} - \beta\left\| A^{3-j}\hat{u}\left(\xi\right)\right\|^2_{L_2(R;H)}.$$

Здесь мы использовали тот факт, что

$$T_j\left(\lambda;\beta;\mu\right) = \lambda^3 E + a_{2j}\left(\beta\right)\lambda^2 A + a_{1j}\left(\beta\right)\lambda A + A^3,$$

причем числа $a_{2j}\left(\beta\right)$ и $a_{1j}\left(\beta\right)$ действительные числа, поскольку корни полинома $S_j\left(\lambda;\beta;\mu\right)$ с действительными коэффициентами симметричны относительно действительной оси и начало координат. Теорема доказана.

Теперь будем доказывать основную теорему

Теорема 4. Нормы $N_j\left(R\right)$ определенные из равенства (2) вычисляются следующим образом

$$N_1\left(R\right) = N_2\left(R\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Доказательство. Из равенства (5) получаем, что при $\beta \in [0, 27/4)$ и $u \in W_2^3\left(R;H\right)$ имеет место неравенство

$$\left\| P_0\left(d/dt;A\right)u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \geq \beta\left\| A^{3-j}u^{(j)}\right\|^2_{L_2(R_+;H)},\ \ j = 1,\,2.$$

При $\beta \to 27/4$ отсюда получаем, что

$$\left\| A^{3-j}u^{(j)}\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \leq \frac{4}{27}\left\| P_0\left(d/dt;A\right)u\right\|^2_{L_2(R_+;H)},$$

т.е.

$$N_j\left(R\right) \leq \left(\frac{4}{27}\right)^{1/2} = \frac{2\sqrt{3}}{9},\ \ j = 1,\,2. \tag{6}$$

Докажем, что эти неравенства точны, т.е. $N_j\left(R\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$. С этой целью при любом $\varepsilon > 0$ построим вектор-функцию $u_\varepsilon\left(t\right) \in W_2^3\left(R;H\right)$, такое что

$$K\left(u_\varepsilon\right) = \left\| P_0\left(d/dt;A\right)u_\varepsilon\right\|^2_{L_2(R_+;H)} - \left(\frac{27}{4} + \varepsilon\right)\left\| A^{3-j}u_\varepsilon^{(j)}\right\|^2_{L_2(R_+;H)} < 0. \tag{7}$$

Будем искать $u_\varepsilon\left(t\right)$ в виде $u_\varepsilon\left(t\right) = g_\varepsilon\left(t\right)\varphi_\varepsilon$, где $g_\varepsilon\left(t\right)$ скалярная функция из $W_2^3\left(R;H\right)$, а φ_ε некоторый вектор из $D\left(A^6\right)$, причем $\left\|\varphi_\varepsilon\right\| = 1$. Сперва используя теорему Планшареля неравенство (8) напишем в этом случае в эквивалентном форме

$$K\left(u_\varepsilon\right) = \left\| P_0\left(i\xi;A\right)\hat{g}_\varepsilon\left(\xi\right)\varphi_\varepsilon\right\|^2 - \left(\frac{27}{4} + \varepsilon\right)\left\| A^{3-j}\xi^j\hat{g}_\varepsilon\left(\xi\right)\varphi_\varepsilon\right\|^2 =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(P_0\left(i\xi; A\right) P_0\left(-i\xi; A\right) \varphi_\varepsilon, \varphi_\varepsilon\right) \left|\hat{g}_\varepsilon\left(\xi\right)\right|^2 - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{27}{4} + \varepsilon\right) \xi^{2j} \left(A^{6-2j} \varphi_\varepsilon, \varphi_\varepsilon\right) \left|\hat{g}\left(\xi\right)\right|^2\right) d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(S_j\left(i\xi, \frac{27}{4} + \varepsilon, A\right) \varphi_\varepsilon, \varphi_\varepsilon\right) \left|\hat{g}_\varepsilon\left(\xi\right)\right|^2 d\xi. \qquad (8)$$

Если A имеет собственное значение μ, то считая что $A\varphi_\varepsilon = \mu\varphi_\varepsilon$и $|\varphi_\varepsilon| = 1$ получаем, что $\left(S_j\left(i\xi, \frac{27}{4} + \varepsilon, A\right) \varphi_\varepsilon, \varphi_\varepsilon\right) = S_j\left(i\xi, \frac{27}{4} + \varepsilon, \mu_\varepsilon\right) < 0$, при некотором ξ. Если A имеет непрерывный спектр μ, то для любого $\delta > 0$ можно найти вектор $\varphi_\varepsilon(\|\varphi_\delta\| = 1)$, такое что $A^m\varphi_\delta + 0\left(1, \delta\right), m = 1, 2....$ В этом случае также при достаточно малом $\delta > 0$ можно добиваться, что $S_j\left(i\xi, \frac{27}{4} + \varepsilon, \mu_\varepsilon\right) < 0$ при некотором ξ. Так как функция $S_j\left(i\xi, \frac{27}{4} + \varepsilon, \mu_\varepsilon\right)$ непрерывно по ξ то можно найти интервал (ξ_1, ξ_2) такой, что $S_j\left(i\xi, \frac{27}{4} + \varepsilon, \mu_\varepsilon\right) < 0$ при $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$. Теперь подберем $\hat{g}_\varepsilon\left(\xi\right)$ таким образом, что он имеет носитель в интервале (ξ_1, ξ_2), бесконечно дифференцируема в R. Тогда из (8) следует, что

$$K\left(u_\varepsilon\right) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(S_j\left(i\xi, \frac{27}{4} + \varepsilon, A\right) \varphi_\varepsilon, \varphi_\varepsilon\right) \left|\hat{g}_\varepsilon\left(\xi\right)\right|^2 d\xi < 0.$$

Далее, полагая

$$g_\varepsilon\left(t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \hat{g}_\varepsilon\left(\xi\right) e^{i\xi t}$$

мы получаем, что $K\left(u_\varepsilon\left(t\right)\right) = K\left(g_\varepsilon\left(t\right) \varphi_\varepsilon\right) < 0$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Ж.-Л.Лионс, Э. Мадженес, Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971

[2] С.Ф. Бабаева, С.С. Мирзоев, Об оценке нормы операторов промежуточных производных и их применения, Мат. заметки, 2019, т.102, No.1, с.148-151

[3] С.С. Мирзоев, Ф.А. Гулиева, О полноте элементарных решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка с операторными коэффициентами. "Математические заметки" , 2009. т.86, No.5,с.796-800

[4] S.S. Mirzoyev, S.F. Babayeva, On a double-point value problem for a second order operator-differential equation and its application, Appl., Comput. Math, v.16, No.3, 2017, pp. 313-322.

[5] С.С. Мирзоев, К теории разрешимости краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений, ДАН ССР, т.273, No.2, 1983, с.292-295

[6] М.Г. Гасымов, С.С. Мирзоев, О разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка, Дифференциальные уравнения, 1992, т.28, No.4, с.651-661

[7] A.R. Aliyev, A.A. Gasymov, On the correct solvability of the boundary-value problem for one class operator-differential equations of the fourth order with complex characteristics, Boundary Value Problems, 2009, doi:10 1153/2009/710386

Айдан Т. Газилова
Бакинский Государственный Университет, Азербайджан, Баку
*E-mail:*aydan-9393@list.ru