Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 9, No 1, 2019, July
ISSN 2222-5498

Смешанная Задача для Полулинейных Гиперболических Уравнений с Динамическим Граничным Условием

С.О. Рустамова

Аннотация. Рассматривается смешанная задача для полулинейных гиперболических уравнений с нелинейной диссипацией и с динамическим граничным условием. Сперва смешанная задача моделируется уравнением с нелинейным оператором в некотором гильбертовом пространстве. Применяя известные результаты о разрешимости операторно- дифференциальных уравнений, доказаны теоремы существования и единственности решений, рассматриваемой смешанной задачи. Далее исследуется корректность предельной задачи.

Key Words and Phrases: **Ключевые слова:** гиперболическое уравнение, смешанная задача, нелинейная диссипация, динамическое граничное условие

1. Введение

Полулинейные волновые уравнения с нелинейной диссипацией и нелинейным источником исследованы в работах [1, 2]. В работе [1] рассматривается смешанная задача

$$u_{tt} - \Delta u + f(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

$$\partial_\nu u + u = -g(u_t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t > 0,$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \Omega,$$

где Ω - ограниченная область с гладкой границей Γ. При выполнении некоторых условий исследовано существование минимального глобального аттрактора.

В работе [2], налагая некоторые условия на нелинейные функции $g_0(x)$, $g(\cdot)$, $f(\cdot)$ и $h(\cdot)$ доказано существование слабых локальных решений смешанной задачи

$$u_{tt} + g_0(u_t) = \Delta u + f(u), \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

$$\partial_\nu u + u + g(u_t) = h(u), \quad x \in \Gamma, \quad t > 0,$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \Omega,$$

 © *2011 JCAM* All rights reserved.

В работе [4] исследовано существование решений смешанной задачи:

$$u_{tt} - \mu(t)u_{xx} + Ku + \lambda u_t = f(t,x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T,$$

$$u(0,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$-\mu(t)u_x(1,t) = Q(t), \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x). \quad 0 < x < 1,$$

где $Q(t) = K_1(t)u(1,t) + \lambda_1(t)u_t(1,t) - g(t) - \int\limits_0^t K(t-s)u(1,s)ds$, $\mu(t)$, $K(t)$, $K_1(t)$, $\lambda_1(t)$, $g(t)$, $f(t,x)$ -непрерывные функции, $\mu(t) \geq \mu_0$, а μ_0, K, λ -некоторые постоянные. Подобные задачи исследованы также в работах [4, 5, 6].

В данной работе рассматривается смешанная задача для полулинейных волновых уравнений с нелинейной диссипацией и нелинейным источником

$$u_{tt} - u_{xx} + B_1(u_t) + B_2(u) = f(t,x), \quad x \in (0,1), \quad t > 0, \tag{1}$$

с граничными

$$u(t,0) = 0, \quad t > 0 \tag{2}$$

$$\varepsilon u_{tt}(t,1) + u_x(t,1) + b_1(u_t(t,1)) + b_2(u(t,1)) = g(t), \quad t > 0 \tag{3}$$

и начальными условиями

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x), \quad x \in (0,1), \tag{4}$$

где $B_1(s) = \mu|s|^{q-1}s$, $b_1(s) = \mu_1|s|^{q_1-1}s$, $B_2(s) = \eta|s|^{p-1}s$, $b_2(s) = \eta_1|s|^{p_1-1}s$, $f(t,x) \in W_2^1([0,T] \times (0,1))$, $g(t) \in W_2^1(0,T)$.

Исследуется разрешимость задачи (1)-(4). Далее в случае $q = q_1 = 1$ исследуя предел решений задачи (1)-(4)при $\varepsilon \to 0$, доказывается, что предельная функция является решением смешанной задачи:

$$u_{tt} - u_{xx} + \mu u_t + B_2(u) = f(t,x), \quad x \in (0,1), \quad t > 0, \tag{5}$$

$$u(t,0) = 0, \quad t > 0, \tag{6}$$

$$u_x(t,1) + \mu_1 u_t(t,1) + b_2(u(t,1)) = g(t), \quad t > 0, \tag{7}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x), \quad x \in (0,1). \tag{8}$$

2. Моделирование задачи в операторной форме и теоремы разрешимости

Норму в пространстве $L_2(0,1)$ будем обозначать через $\|\cdot\|$. Пусть $X_0, X_1, \ldots, X_k$ некоторые пространства Банаха. Через $W_p^k(0,T;X_0,X_1,\ldots,X_k)$ и $C^k([0,T];X_0,X_1,\ldots,X_k)$ обозначим следующее пространство:

$$W_p^k(0,T;X_0,X_1,\ldots,X_k)=\left\{f:\frac{d^if}{dt^i}\in L_\infty(0,T;X_i), i=0,1,\ldots,k\right\}, 1\le p\le+\infty,$$

$$C^k([0,T];X_0,X_1,\ldots,X_k)=\left\{f:\frac{d^if}{dt^i}\in C([0,T];X_i), i=0,1,\ldots,k\right\}.$$

Введем также следующие обозначения:

Через $W_2^k(0,1)$ обозначим пространство Соболева, а через ${}_0W_2^1(\Omega)$ обозначим следующее подпространство ${}_0W_2^1(0,1)=\{\nu:\nu\in W_2^1(0,1),\nu(0)=0\}$. Пусть H - прямая сумма $L_2(0,1)$ и R, т.е. $H=L_2(0,1)\oplus R=\{w:w=(u,a),u\in L_2(0,1),\alpha\in R\}$, со скалярным произведением

$$\langle w_1,w_2\rangle_H=\int\limits_0^1 u_1(x)u_2(x)dx+\varepsilon\alpha_1\cdot\alpha_2,$$

где $w_k=(u_k,\alpha_k)$, $u_1,u_2\in L_2(0,1)$, $\alpha_1,\alpha_2\in R$.

Введем также обозначения: $H_1=\{\tilde u:\tilde u=(u,u(1)),u\in W_2^2(0,1)\cap {}_0W_2^1(0,1)\}$, $H_0=\{\tilde u:\tilde u=(u,u(1)),u\in {}_0W_2^1\}$.

В пространстве $H=L_2(0,1)\oplus R$ определим линейный оператор A

$$\begin{cases}D(A)=H_1,\\ A_\varepsilon\tilde u=(-u_{xx}(x),\dfrac{1}{\varepsilon}u_x(1)),\tilde u=(u,u(1)).\end{cases}$$

Определим нелинейный опреатор $G(\cdot)$ следующим образом

$$G(\tilde\nu)=\left(\mu|\nu(x)|^{q-1}\nu(x),\mu_1|\nu(1)|^{q_1-1}\nu(1)\right).$$

Определим также нелинейный оператор $\Phi(\cdot)$ следующим образом

$$\Phi(\tilde\nu)=\left(\eta|\nu(x)|^{p-1}\nu(x),\eta_1|\nu(1)|^{p_1-1}\nu(1)\right).$$

Пусть $\tilde u=(u(x),u(1))$, $\tilde\nu=(\nu(x),\nu(1))\in H_1$, тогда в силу определения скалярного произведения в H, определения оператора A_ε, получим, что

$$\langle A_\varepsilon\tilde u,\tilde\nu\rangle=-\int\limits_0^1 u_{xx}(x)\nu(x)dx+\frac{1}{\varepsilon}\cdot\varepsilon u_x(1)\nu(1)=$$

$$= -\int_0^1 u(x)\nu_{xx}(x)dx + u(1)\nu_x(1) = \langle \tilde{u}, A_\varepsilon \tilde{\nu}\rangle,$$

т.е. A_ε - линейный симметрический оператор. С другой стороны,

$$\langle \tilde{u}, A_\varepsilon \tilde{\nu}\rangle = \int_0^1 |u_{xx}|^2 dx \geq 0.$$

т.е. A_ε ограничен снизу. Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. При любых $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$, A_ε - самосопряженный положительно определенный оператор в $H = L_2(0,1) \oplus R$.

Из определения нелинейного оператора $G(\cdot)$ получим следующее утверждение

Лемма 2. При любых $\mu > 0$, $\mu_1 > 0$, $G(\cdot)$ - монотонный оператор в H.

Лемма 3. При любых $\eta > 0$, $\eta_1 > 0$, $\Phi(\cdot)$ действует из H_0 в H и удовлетворяет локальному условию Липшица, т.е.

$$\|\Phi(w_1) - \Phi(w_2)\|_H \leq c(r)\|w_1 - w_2\|_{H_0},$$

где $\|w_1\|_{H_1} \leq r$, $\|w_2\|_{H_0} \leq r$.

Пусть $\varphi \in W_2^2(0,1) \cap \ {}_0W_2^1(0,1)$, $\psi \in \ {}_0W_2^1(0,1)$, тогда используя леммы 1-3, задачу (1)-(4) можем сформулировать как задачу Коши в пространстве $H = L_2(0,1) \oplus R$

$$w''(t) + A_\varepsilon w(t) + G(w'(t)) + \Phi(w(t)) = F(t,x), \tag{9}$$

$$w(0) = w_0, \quad w'(0) = w_1, \tag{10}$$

где $F(t,x) = (f(t,x), g(t))$, $w_0 = (\varphi(x), \varphi_1)$, $w_1 = (\psi(x), \psi(1))$.

Рассмотрим гильбертово пространство $Z = H(A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \times H$, со скалярным произведение

$$[z_1, z_2] = \langle A_\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_1, A_\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_2\rangle_H + \langle \nu_1, \nu_2\rangle_H,$$

где $z_i = (u_i, \nu_i)$, $i = 1, 2$.

Заменой $u = w, \nu = w_i$, задачу (9),(10) можем свести к задаче Коши в пространстве $Z = H(A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \times H$:

$$z'(t) + \tilde{A}_\varepsilon z(t) + \tilde{G}(z(t)) = \tilde{\Phi}(z(t)) + \tilde{F}(t,x), \tag{11}$$

$$z(0) = z_0, \tag{12}$$

где

$$z_0 = (w_0, w_1), \tilde{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ A_\varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \quad D(\tilde{A}_\varepsilon) = H(A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \times H,$$

$$\tilde{G}(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -G(z_2) \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}(t,x) = \begin{pmatrix} 0 \\ F(t,x) \end{pmatrix}.$$

Лемма 4. Пусть $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$, $\mu_1 > 0$, тогда $M_\varepsilon = \tilde{A}_\varepsilon + \tilde{G}(\cdot)$ является максимально монотонным оператором в Z.

В силу лемм 1-3 и теоремы 4.1 [6], получим следующий результат.

Теорема 1. Пусть $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$, $\mu_1 > 0$, $\tilde{F}(\cdot) \in W_1^1(0, T;\ {}_0W_2^1, L_2(0,1))$, тогда при любых $z_0 \in D(\tilde{A}_\varepsilon + G)$ задача

$$z'(t) + \tilde{A}_\varepsilon z(t) + \tilde{G}(z(t)) = \tilde{F}(t, x), \tag{13}$$

$$z(0) = z_0, \tag{14}$$

имеет единственное решение $z = z_\varepsilon \in W_\infty^1(0, T;\ {}_0W_2^1, L_2(0,1))$ и $z_\varepsilon(t) \in D(\tilde{A}_\varepsilon + G)$ для всех $0 \le t \le T$.

Кроме того, если $z_0 \in \overline{D(\tilde{A}_\varepsilon + G)}$ и $\tilde{F}(\cdot) \in L_1(0, T; Z)$, для всех $0 \le t \le T$, то существует обобщенное решение $z \in C([0, T]; Z)$.

Рассмотрим смешанную задачу

$$u_{tt} - u_{xx} + B_1(u_t) = f(t, x), \quad x \in (0,1), \quad t > 0, \tag{15}$$

$$u(t, 0) = 0, \quad t > 0 \tag{16}$$

$$\varepsilon u_{tt}(t, 1) + u_x(t, 1) + b(u_t(t, 1)) = g(t), \quad t > 0 \tag{17}$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in (0,1), \tag{18}$$

Используя теорему 1 получим следующий результат.

Теорема 2. Пусть $\varepsilon > 0$, $\mu \ge 0$, $\mu_1 \ge 0$, тогда при любых $\varphi \in W_2^2(\Omega) \cap {}_0W_2^1$, $\psi \in {}_0W_2^1$ и $T > 0$ задача (15)-(18) имеет единственное решение $u_\varepsilon(\cdot) \in W_\infty^2([0, T];$ $W_2^2(\Omega) \cap {}_0W_2^1;\ {}_0W_2^1, L_2(0,1))$ такое, что $u(1, \cdot) \in W_\infty^2([0, T], R)$.

Далее учитывая Лемму 4 и теорему 7.2, из [1](см. также [7]) получим следующее утверждение

Теорема 3. Пусть $\varepsilon > 0$, $\mu \ge 0$, $\mu_1 \ge 0, \tilde{F}(\cdot) = W_1^1(0, T;\ {}_0W_2^1, L_2(0,1))$, тогда существует такое $T' > 0$, что при любых $z_0 \in D(\tilde{A}_\varepsilon + G)$ задача

$$z'(t) + \tilde{A}_\varepsilon z(t) + \tilde{G}(z(t)) + \tilde{\Phi}(z(t)) = \tilde{(F)}(t, x), \tag{19}$$

$$z(0) = z_0, \tag{20}$$

имеет единственное решение $z = z_\varepsilon \in W_\infty^1(0, T;\ {}_0W_2^1, L_2(0,1))$ и $z_\varepsilon(t) \in D(\tilde{A}_\varepsilon + G)$.

Кроме того, если $z_0 \in \overline{D(\tilde{A}_\varepsilon + G)}$ и $\tilde{F}(\cdot) \in L_1(0, t, Z)$ для всех $0 \le t \le T$, то существует обобщенное решение $z \in C([0, T']; Z)$.

Если $T_{\max} > 0$ длина максимального интервала существования локального решения, то выполняется одна из следующих альтернатив

1. $\lim\limits_{t \to T_{\max} - 0} \|z_\varepsilon(t)\|^2 = +\infty$;

2. $T_{\max} = +\infty$.

Отсюда получим следующий результат о существовании локалных решений для смешанной задачи (1)-(4).

Теорема 4. Пусть $\varepsilon > 0$, $\mu \geq 0$, $\mu_1 \geq 0$, тогда при любых $\varphi \in W_2^2(\Omega) \cap\ {}_0W_2^1$, $\psi \in\ {}_0W_2^1$, существует такое $T' > 0$, что задача (1)-(4) имеет единственное решение $u_\varepsilon(\cdot) \in W_\infty^2([0,T']; W_2^2(\Omega) \cap\ {}_0W_2^1;\ {}_0W_2^1, L_2(0,1))$ такое, что $u(1,\cdot) \in W_\infty^2([0,T']; R)$.

Если $T_{\max} > 0$ длина максимального интервала существования локального решения $u_\varepsilon(\cdot) \in W_\infty^2([0,T_{\max}); W_2^2(\Omega) \cap\ {}_0W_2^1;\ {}_0W_2^1, L_2(0,1))$ такое, что $u(1,\cdot) \in W_\infty^2([0,T_{\max}), R)$, то выполняется одна из следующих альтернатив

1. $\lim\limits_{t\to T_{\max}-0}[\|u_t(t,\cdot)\|^2 + \|u_x(t,\cdot)\|^2 + |u_t(t,1)|^2] = +\infty;$ (21)
2. $T_{\max} = +\infty$.

3. Разрешимость "в целом"смешанной задачи (1)-(4)

Теорема 5. Пусть $\mu \geq 0$, $\mu_1 \geq 0$, $\eta \geq 0$, $\eta_1 \geq 0$, тогда при любых $\varphi \in W_2^2(\Omega) \cap {}_0W_2^1$, $\psi \in {}_0W_2^1$ задача (1)-(4) имеет единственное решение $u_\varepsilon(\cdot) \in W_\infty^2([0,T]; W_2^2(\Omega) \cap {}_0W_2^1; {}_0W_2^1, L_2(0,1))$ такое, что $u(1,\cdot) \in W_\infty^2(0,T;R)$.

Доказательство. Умножаем обе части (1) на $u_{\varepsilon t}(t,x)$ и интегрируем по области $[0,t]\times[0,1]$. После интегрирования по частям получим:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 |u_{\varepsilon t}(t,x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 |u_{\varepsilon x}(t,x)|^2 dx -$$

$$-\int\limits_0^t u_{\varepsilon t}(t,1)u_{\varepsilon t}(t,1)dx - \mu_0 \int\limits_0^t\int\limits_0^1 |u_{\varepsilon s}(s,x)|^{q_0+1} dxds +$$

$$+\frac{\eta_0}{p_0+1}\int\limits_0^1 |u_\varepsilon(s,x)|^{p_0+1}dx = \frac{1}{2}\|\psi_x\|^2 + \frac{1}{2}\|\varphi_x\|^2 + \frac{\eta_0}{p_0+1}\int\limits_0^1 |\varphi(x)|^{p_0+1}dx. \quad (22)$$

Аналогичным образом, умножаем обе части (3) на $u_{\varepsilon t}(1,t)$ и интегрируем по области $[0,t]$. Имеем

$$\frac{\varepsilon}{2}|u_{\varepsilon t}(t,1)|^2 + \int\limits_0^t u_{\varepsilon t}(s,1)u_{\varepsilon_t}(s,1)ds + \mu_1\int\limits_0^1 |u_{\varepsilon s}(s,1)|^{q_1+1}ds +$$

$$+\frac{\eta_1}{p_1+1}|u_\varepsilon(t,1)|^{p_1+1} = \frac{\varepsilon}{2}|\psi(1)|^2 + \frac{\eta}{p_1+1}|\varphi(1)|^{p_1+1}. \quad (23)$$

Суммируя (22) и (23) получим, что

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 |u_{\varepsilon t}(t,x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 |u_{\varepsilon x}(t,x)|^2 dx +$$

$$+\mu_1\int\limits_0^t |u_{\varepsilon s}(s,1)|^{q_1+1}ds+\mu_0\int\limits_0^t\int\limits_0^1 |u_{\varepsilon s}(s,x)|^{q_0+1}dxds+$$

$$+\frac{\eta_0}{p_0+1}\int\limits_0^1 |u_\varepsilon(s,x)|^{p_0+1}dx+\frac{\varepsilon}{2}|u_{\varepsilon t}(t,1)|^2+\frac{\eta_1}{p_1+1}|u_\varepsilon(t,1)|^{p_1+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 |\psi(x)|^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 |\varphi_x(x)|^2dx-\frac{\eta_0}{p_0+1}\int\limits_0^1 |\varphi(x)|^{p_0+1}dx+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}|\psi(1)|^2+\frac{\eta}{p_1+1}|\varphi(1)|^{p_1+1}.$$

Применяя Лемму Гронуола отсюда получим априорную оценку (21).

4. Смешанная задача с линейной диссипацией и исследование предельной задачи

Сначала заметим, что в силу леммы 4 в этом случае линейный оператор $-M=-\tilde{A}_\varepsilon-G$ является максимально диссипативным. Тогда в силу Лемм 1-4 используя [8] получим, что справедливы следующие результаты

Теорема 6. Пусть $\varepsilon>0$, $\mu\geq 0$, $\mu_1\geq 0$, $q=q_1=1$, $g'(\cdot)\in L_2(0,T)$, тогда при любых $\varphi(\cdot)\in W_2^2(\Omega)\cap\ {}_0W_2^1$, $\psi(\cdot)\in\ {}_0W_2^1$, существует такое $T'>0$ что задача (1)-(4) имеет единственное решение $u_\varepsilon(\cdot)\in C^2([0,T'];\,W_2^2(\Omega)\cap\,{}_0W_2^1;\,{}_0W_2^1,L_2(0,1))$ такое, что $u(1,\cdot)\in C^2([0,T'];R)$.

Если $T_{\max}>0$ длина максимального интервала существования локального решения,то выполняется одна из следующих альтернатив

1. $\lim\limits_{t\to T_{\max}-0}[\|u_t(t,\cdot)\|^2+\|u_x(t,\cdot)\|^2+|u_t(t,1)|^2]=+\infty;$
2. $T_{\max}=+\infty.$

Теорема 7. Пусть $\eta\geq 0$, $\eta_1\geq 0$, $q=q_1=1$, тогда при любых $\varphi(\cdot)\in W_2^2(\Omega)\cap\ {}_0W_2^1$, $\psi(\cdot)\in\ {}_0W_2^1$, задача (1)-(4) имеет единственное решение $u_\varepsilon(\cdot)\in C^2([0,T];W_2^2(\Omega)\cap$ $\cap\,{}_0W_2^1;\,{}_0W_2^1,L_2(0,1))$ такое, что $u(1,\cdot)\in C^2([0,T];R)$.

Теперь исследуем разрешимость предельной задачи, т.е. задачи

$$u_{tt}-u_{xx}+u_t+B_2(u)=f(t,x),\quad x\in(0,1),\quad t>0,\tag{24}$$

$$u(t,0)=0,\quad t>0,\tag{25}$$

$$u_x(t,1)+u_t(t,1)+b_2(u(t,1))=g(t),\quad t>0,\tag{26}$$

$$u(0,x)=\varphi(x),\quad u_t(0,x)=\psi(x),\ \ x\in(0,1),\tag{27}$$

где $B_2(s)=\mu|s|^{q-1}s$, $b_2(s)=\mu_1|s|^{q_1-1}s$.

Теорема 8. Пусть $\eta \geq 0$, $\eta_1 \geq 0$, тогда при любых $\varphi(\cdot) \in W_2^2(\Omega) \cap \ {}_0W_2^1$, $\psi(\cdot) \in {}_0W_2^1$, что задача (24)-(27) имеет единственное решение $u_\varepsilon(\cdot) \in C^2([0,T]; W_2^2(\Omega) \cap$ $\cap\, {}_0W_2^1;\, {}_0W_2^1, L_2(0,1))$ такое, что $u(1,\cdot) \in C^2([0,T]; R)$.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы 8 и $\varepsilon > 0$, тогда при любых $\varphi(\cdot) \in W_2^2(\Omega) \cap \ {}_0W_2^1$, $\psi(\cdot) \in {}_0W_2^1$ задача (1)-,(4) имеет единственное решение $u_\varepsilon(\cdot) \in C^2([0,T']; W_2^2(\Omega) \cap {}_0W_2^1; {}_0W_2^1, L_2(0,1))$ такое, что $u_\varepsilon(1,\cdot) \in C^2([0,T'], R)$

Умножаем обе части (1) на $u_{\varepsilon t}(t,x)$ и интегрируем по области $[0,t] \times [0,1]$. Аналогичным образом, умножаем обе части (3) на $u_{\varepsilon t}(1,t)$ и интегрируем по области $[0,t]$.

После интегрирования по частям получим:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 |u_{\varepsilon t}(t,x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 |u_{\varepsilon x}(t,x)|^2 dx +$$

$$+\mu_0 \int\limits_0^t \int\limits_0^1 |u_{\varepsilon s}(s,x)|^2 dx ds + \frac{\eta_0}{p_0+1}\int\limits_0^1 |u_\varepsilon(s,x)|^{p_0+1} dx + \mu_1 \int\limits_0^t |u_{\varepsilon s}(s,1)|^2 ds +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}|u_{\varepsilon t}(t,1)|^2 + \frac{\eta_1}{p_1+1}|u_\varepsilon(t,1)|^{p_1+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 |\psi(x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 |\varphi_x(x)|^2 dx - \frac{\eta_0}{p_0+1}\int\limits_0^1 |\varphi(x)|^{p_0+1} dx +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}|\psi(1)|^2 + \frac{\eta}{p_1+1}|\varphi(1)|^{p_1+1}.$$

Отсюда следует априорная оценка

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 |u_{\varepsilon t}(t,x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 |u_{\varepsilon x}(t,x)|^2 dx +$$

$$+\int\limits_0^1 |u_\varepsilon(s,x)|^{p_0+1} dx + \int\limits_0^1 |u_{\varepsilon s}(s,1)|^2 ds +$$

$$+\varepsilon|u_{\varepsilon t}(t,1)|^2 + |u_\varepsilon(t,1)|^{p_1+1} \leq C_1, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{28}$$

где $C_1 > 0$ не зависит от $0 < \varepsilon < 1$.

Из (1) получим, что

$$\int\limits_0^1 |u_{\varepsilon tt}(0,x)|^2 dx \leq c\left(\int\limits_0^1 |\varphi_{tt}(x)|^2 dx + \int\limits_0^1 |\varphi(x)|^{2p_0} dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^1 |\psi(x)|^2 dx + \int\limits_0^1 |f(0,x)|^2 dx\right) \leq C_2, \tag{29}$$

а из (3) получим

$$\varepsilon|u_{\varepsilon tt}(0,1)| \le |\varphi_x(1)| + \mu_1|\psi(1)| + \eta_1|\varphi(1)|^{p_1} + |g(0)| \le C_3, \tag{30}$$

где C_2 и C_3 не зависят от $\varepsilon > 0$.
Обозначая $y_h(t,x) = \frac{1}{h}(u(t+h,x)-u(t,x))$ из (1)-(4) получим следующие тождества

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 |y_{ht}(t,x)|^2dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 |y_{hx}(t,x)|^2dx + \mu_0\int\limits_0^t\int\limits_0^1 |y_{hs}(s,x)|^2dxds-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 y_{hs}(s,1)y_{hs}(s,1)ds + \eta_0\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \frac{1}{h}[C(u(s+h,x)) - C(u(s,x))]y_{hs}(s,x)dxds =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 |y_{ht}(0,x)|^2dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 |y_{hx}(0,x)|^2dx + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 f_h(s,x)y_{hs}(s,x)dxds. \tag{31}$$

Применяя формулы Лагранжа и используя априорную оценку (28) получим, что

$$\left|\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \frac{1}{h}[C(u(s+h,x)) - C(u(s,x))]y_{hs}(s,x)dxds\right| \le$$

$$\le c\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \left(|u(s+h,x)|^{p_0} + |u(s,x)|^{p_0}\right)y_h(s,x)y_{hs}(s,x)dxds \le$$

$$\le c\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \left[|y_h(s,x)|^2 + |y_{h_s}(s,x)|^2\right]dxds. \tag{32}$$

Из (31) и (32) следует, что

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 |y_{ht}(t,x)|^2dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 |y_{hx}(t,x)|^2dx+$$

$$+\mu_0\int\limits_0^t\int\limits_0^1 |y_{hs}(s,x)|^2dxds - \int\limits_0^t y_{hx}(s,1)y_{hs}(s,1)ds \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int\limits_0^1 |y_{ht}(0,x)|^2dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 |y_{hx}(0,x)|^2dx + c\int\limits_0^t\int\limits_0^1 |y_h(s,x)|^2dxds+$$

$$+c\int\limits_0^t\int\limits_0^1|y_{hs}(s,x)|^2dxds+\int\limits_0^t\int\limits_0^1|f_h(s,x)|^2dxds. \qquad (33)$$

Аналогичным образом, из (3) получим, что

$$\frac{\varepsilon}{2}|y_{ht}(t,1)|^2+\frac{\mu_1}{2}\int\limits_0^t|y_{ht}(s,1)|^2ds+\int\limits_0^t y_{hx}(s,1)y_{hs}(s,1)ds\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{2}|y_{ht}(0,1)|^2+\frac{\eta_1^2}{\mu_1}\int\limits_0^t|y_h(s,1)|^2ds+\frac{1}{\mu_1}\int\limits_0^t|g_h(s)|^2ds. \qquad (34)$$

Суммируя (33) и (34) получим неравенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1|y_{ht}(t,x)|^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^1|y_{hx}(t,x)|^2dx+\frac{\mu_1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1|y_{ht}(s,x)|^2dsdx+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}|y_{ht}(t,1)|^2+\frac{\mu_1}{2}\int\limits_0^t|y_{ht}(s,1)|^2ds\le\frac{1}{2}\int\limits_0^1|y_{ht}(0,x)|^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^1|y_{hx}(0,x)|^2dx+$$

$$+c\int\limits_0^t|y_h(s,x)|^2dxds+c\int\limits_0^t|y_{hs}(s,x)|^2dxds+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}|y_{ht}(0,1)|^2+\frac{\eta_1^2}{\mu_1}\int\limits_0^t|y_h(s,1)|^2ds+\frac{1}{\mu_1}\int\limits_0^t|g_h(s)|^2ds. \qquad (35)$$

В силу априорной оценки (29) имеем следующие оценки:

$$\int\limits_0^1|y_{ht}(0,x)|^2dx\le C_4, \qquad (36)$$

а из (30) следует, что

$$\varepsilon|y_{ht}(0,1)|^2\le C_4, \qquad (37)$$

где $C_4>0$ не зависит от $0<\varepsilon<1$.

С другой стороны, $u_{\varepsilon xt}\in C([0,T],L_2(0,1))$, поэтому

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_0^1|y_{hx}(0,x)|^2dx=\lim_{h\to 0}\int\limits_0^1\left|\int\limits_0^1 u_{\varepsilon xt}(\tau h,x)d\tau\right|^2dx\le$$

$$\leq c_5 \lim_{h\to 0} \int\limits_0^1 |u_{\varepsilon xt}(x,t)|^2 dx = c_5 \int\limits_0^1 |\psi_x|^2 dx \leq c_6. \tag{38}$$

В силу (28) имеем следующую оценку

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 |y_h(x,t)|^2 dx \leq \int\limits_0^t \int\limits_0^1 |u_t(x,s)|^2 dx dt \leq c_7. \tag{39}$$

Аналогично имеем следующие равенства

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_0^1 |y_{ht}(t,x)|^2 dx ds = \int\limits_0^1 |u_{\varepsilon tt}(t,x)|^2 dx; \tag{40}$$

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_0^1 |y_{hx}(t,x)|^2 dt = \int\limits_0^1 |u_{\varepsilon tx}(t,x)|^2 dx; \tag{41}$$

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 |y_{ht}(s,x)|^2 dt = \int\limits_0^t \int\limits_0^1 |u_{\varepsilon ss}(s,x)|^2 dx ds. \tag{42}$$

С другой стороны

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_0^t |g_h(s)|^2 ds = \int\limits_0^t |g'(s)|^2 ds \leq c_8; \tag{43}$$

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 |f_h(s,x)|^2 dx ds = \int\limits_0^t \int\limits_0^1 |f'_s(s,x)|^2 dx ds \leq c_9. \tag{44}$$

Переходя к пределу при $h \to 0$ и учитывая (35)-(44) из (32) получим, что

$$\int\limits_0^1 |u_{\varepsilon tt}(t,x)|^2 dx + \int\limits_0^1 |u_{\varepsilon xt}(t,x)|^2 dx + \varepsilon |u_{\varepsilon tt}(t,1)|^2 \leq$$

$$\leq c_{10} + c_{11} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 |u_{\varepsilon ss}(s,x)|^2 ds dx.$$

Применяя Лемму Гронуола отсюда имеем априорную оценку

$$\int\limits_0^1 |u_{\varepsilon tt}(t,x)|^2 dx + \int\limits_0^1 |u_{\varepsilon xt}(t,x)|^2 dx + \varepsilon |u_{\varepsilon tt}(t,1)|^2 \leq c_5, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{45}$$

где $c_5 > 0$ не зависит от $0 < \varepsilon < 1$.

Далее из (1), (29) и (40) получим, что

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 |u_{\varepsilon xx}(t,x)|^2 dx \leq C_6, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{46}$$

где $c_6 > 0$ не зависит от $0 < \varepsilon < 1$.

В силу априорных оценок (28)- (30), (45) и (46) из $\{u_\varepsilon\}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{u_{\varepsilon_k}\}$, что при $\varepsilon_k \to 0$

$$u_{\varepsilon_k} \longrightarrow u \quad * -\text{слабо в} \;\; L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega) \cap_0 W_2^1); \tag{47}$$

$$u_{\varepsilon_k t} \longrightarrow u_t \quad * -\text{слабо в} \;\; L_\infty(0,T;_0 W_2^1); \tag{48}$$

$$u_{\varepsilon_k tt} \longrightarrow u_{tt} \quad * -\text{слабо в} \;\; L_\infty(0,T; L_2(\Omega)); \tag{49}$$

$$u_{\varepsilon_k t}(t,1) \longrightarrow u_t(t,1) \quad \text{в} \quad C[0,T]; \tag{50}$$

$$u_{\varepsilon_k x}(t,1) \longrightarrow u_x(t,1) \quad \text{в} \quad C[0,T]; \tag{51}$$

$$u_{\varepsilon_k tt}(t,1) \longrightarrow u_{tt}(t,1) \quad * -\text{слабо в} \;\; L_2(0,T). \tag{52}$$

Теперь напишем задачи (1)-(4) для $\varepsilon = \varepsilon_k$ и переходим к пределу при $\varepsilon_k \to 0$. Тогда, учитывая (47)-(52) получим, что предельная функция $u(t,x)$ является решением задачи (24)-(27).

Единственность решений доказывается стандартным методом [10].

Список литературы

[1] I. Chueshov, M. Eller, I.Lasiecka, *On the attractor for a semilinear wave equation with critical exponent and nonlinear boundary dissipation*, Communications in Partial Differential EquationS, Vol. 27, Nos. 9 - 10, pp. 1901-–1951, 2002

[2] L.Bociu, I.Lasiecka, *Local Hadamard well-posedness for nonlinear wave equations with supercritical sources and damping* , J. Differential Equations 249(3), (2010), 654-–683.

[3] Nguyen Thanh Long, Le VanUt, Nguyen Thi Thao Trucc, *On a shock problem involving a linear viscoelastic bar*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, Vol.63, Issue 2, 2005, Pages 198–224.

[4] Nguyen Thanh Long, Tran Ngoc Diem, *On the nonlinear wave equation $u_{tt} - u_{xx} = f(x,t,u,u_x,u_t)$ associated with the mixed homogenous conditions*,Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, Vol.29, Issue 11, 1997, Pages 1217–1230.

[5] Le, U.V., *Global unique solvability and decays for a wave equation associated with an integral equation*, Proc. A. Razmadze Math. Inst. 149 (2009) 35-53. [MR2517750]

[6] A.B. Aliev, E.H. Mammadhasanov, *Well-posedness of initial boundary value problems on longitudinal impact on a composite linear viscoelastic bar*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 40(14),(2017),5380-–5390. doi:10.1002/mma.4392

[7] R.Showalter, *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations*, American Mathematical Soc., vol. 49, 2013,

[8] A.B. Aliev, *Solvability "in the large"of the Cauchy problem for quasi-linear equations of hyperbolic type*,(Russian, English) Sov. Math., Dokl. 19, 563-566 (1978); translation from Dokl. Akad. Nauk SSSR 240, 249-252 (1978).

[9] H.Brezis, *Operateurs maximaux monotones*, North Holland, 1973 (ISBN 9780444104304),

[10] Lions J.L., Quelques methodes de resolution des problиmes aux limites non lineaires, Dunod, Paris, 1969.

Самира О. Рустамова
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана, AZ1141, Азербайджанская Республика, г.Баку, ул. Б.Вахабзаде,9
Email: samira.rustamova.1979@mail.ru

Received 10 August 2018
Accepted 20 February 2019