Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 8, No 2, 2018, December
ISSN 2222-5498

Обратная Краевая Задача для Псевдопараболического Уравнения Третьего Порядка с Неклассическими Краевыми Условиями

Я.Т. Мегралиев, А.И. Исмаилов

Аннотация. В работе исследована одна обратная краевая задача псевдо параболического уравнения третьего порядка с неклассическими краевыми условиями . Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, пользуясь этими фактами, доказываются существование и единственность классического решения задачи.

Ключевые слова: обратная краевая задача, задача псевдо параболического уравнения, третьего порядка ,метод Фурье, классическое решение.

1. Введение

Известно немало случаев, когда потребности практики приводят и задачам определения коэффициентов или правой части дифференциального уравнения по некоторым известным данным от его решения . Такие задачи получили название обратных задач математической физики. Обратные задачи представляют собой активно развивающийся раздел современной математики.

Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах. Отметим здесь, прежде всего работы А.Н.Тихонова [1], М.М.Лаврентьева [2,3], В.К. Иванова [4] и их учеников. Более подробно об этом можно прочитать в монографии А.М.Денисова [5].

В этой работе с помощью метода Фурье и принципа сжатых отображений доказаны существование и единственность решения нелокальной обратной краевой задачи для псевдо параболического уравнения тертого порядка с неклассическими краевыми условиями .

2. Постановка задачи и сведение её к эквивалентной задаче.

Рассмотрим для уравнения

$$u_t(x,t) - \alpha(t)u_{txx}(x,t) - \beta(t)u_{xx}(x,t) = p(t)u(x,t) + f(x,t) \tag{1}$$

в области $D_T = \{(x,t) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$ обратную краевую задачу с нелокальным начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x) \ \ (0 \le x \le 1)\ , \tag{2}$$

граничным условием Дирихле

$$u(1,t) = 0 \ \ (0 \le t \le T)\ , \tag{3}$$

неклассическим краевым условием

$$u_{xxx}(0,t) - b\, u_{xx}(0,t) + a\ u_x(0,t) = 0\ (0 \le t \le T) \tag{4}$$

и с дополнительным условием

$$u(x_0,t) = \int_0^t \gamma(\tau) u(x_0,\tau) d\tau + h(t) \quad (0 \le t \le T), \tag{5}$$

где $x_0 \in (0,1)$,$a > 0$, $b > 0$, $\delta \ge 0$-заданные числа, $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$,$\gamma(t)$, $f(x,t)$,$\varphi(x)$,$h(t)$-заданные функции, а $u(x,t)$ и $p(t)$- искомые функции.

Определение 1. *Классическим решением задачи (1)-(5) назовём пару $\{u(x,t), p(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $p(t)$, обладающих следующими свойствами:*

1. *функция $u(x,t)$ непрерывна в D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1) и в условие (4) ;*
2. *функция $p(t)$ непрерывна на $[0,T]$;*
3. *все условия (1)-(5) удовлетворяются в обычном смысле.*

Сначала задача (1)-(5) будет сведена к эквивалентной задаче. С этой целью рассмотрим следующую спектральную задачу[6,7] :

$$y''(x) + \lambda\ \ y(x) = 0, \quad 0 \le x \le 1\,, \tag{6}$$

$$y(1) = 0\,,\ \ (a-\lambda)y'(0) + \lambda b y(0) = 0\ ,\ \ a > 0\,,\ \ b > 0, \tag{7}$$

которая имеет только собственные функции $y_k(x) = \sqrt{2}\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\,(1-x)\right)$, $k = 0,1,2....$, с положительными собственными числами из уравнения $tg\sqrt{\lambda} = (a - \lambda)/(b\sqrt{\lambda})$. Нулевой индекс присваиваем любой собственной функции, а все остальные нумеруем в порядке возрастания собственных чисел.

Справедлива следующая

Теорема 1.*Пусть* $0 < \alpha(t), 0 < \beta(t), \gamma(t) \in C[0,T]$, $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, $f(x,t), f_x(x,t) \in C(D_T)$, $h(t) \in C^1[0,T]$, $h(t) \ne 0\ \ (0 \le t \le T)$,

$$J(\varphi) \equiv b\left(\varphi(0) + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}} \int_0^1 \varphi(x)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right) - \varphi'(0) = 0\,, \tag{8}$$

$$J(f) \equiv b\left(f(0,t)+\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 f(x,t)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right)-f_x(0,t)=0 \ (0\le t\le T) \tag{9}$$

и выполняется условие согласования

$$\varphi(x_0)=h(0). \tag{10}$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)-(5) *эквивалентна задаче определения функций* $u(x,t)$ *и* $p(t)$, *обладающих свойствами 1) и 2) определения решения задачи* (1)-(5), *из соотношений (1)-(3) ,*

$$b\left(u(0,t)+\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 u(x,t)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right)-u_x(0,t)=0 \ (0\le t\le T), \tag{11}$$

$$\gamma(t)u(x_0,t)+h'(t)-\alpha(t)u_{txx}(x_0,t)-\beta(t)u_{xx}(x_0,t)=$$
$$=p(t)\left(\int_0^t \gamma(\tau)u(x_0,\tau)d\tau+h(t)\right)+f(x_0,t) \ \ (0\le t\le T). \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $\{u(x,t),p(t)\}$ - любое решение задачи (1)-(5). Тогда из уравнения (1) получаем:

$$\left[b\left(u_t(0,t)+\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 u_t(x,t)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right)-u_{tx}(0,t)\right]-$$
$$-\alpha(t)\left[b\left(u_{txx}(0,t)+\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 u_{txx}(x,t)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right)-u_{txxx}(0,t)\right]-$$
$$-\beta(t)\left(u_{xx}(0,t)+\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 u_{xx}(x,t)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right)-u_{xxx}(0,t)=$$
$$=p(t)\left[b\left(u(0,t)+\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 u(x,t)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right)-u_x(0,t)\right]+$$
$$+b\left(f(0,t)+\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 f(x,t)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right)-f_x(0,t)=0 \ (0\le t\le T)$$

Отсюда, с учётом (9), имеем:

$$\left[b\left(u_t(0,t)+\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 u_t(x,t)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right)-u_{tx}(0,t)\right]-$$
$$-\alpha(t)\left[b\left(u_{txx}(0,t)+\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 u_{txx}(x,t)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right)-u_{txxx}(0,t)\right]-$$
$$-\beta(t)\left(u_{xx}(0,t)+\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 u_{xx}(x,t)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right)-u_{xxx}(0,t)=$$

$$= p(t)\left[b\left(u(0,t)+\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 u(x,t)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right)-u_x(0,t)\right]. \qquad (13)$$

Дважды **и**нтегрируя по частям, с учётом (3), находим:

$$\int_0^1 u_{xx}(x,t)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx = -u_x(0,t)\sin\sqrt{\lambda_0}-$$

$$-\sqrt{\lambda_0}u(0,t)\cos\sqrt{\lambda_0}-\lambda_0\int_0^1 u(x,t)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))d\,x \ \ (0\le t\le T).$$

Тогда имеем:

$$b\left(u_{xx}(0,t)+\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 u_{xx}(x,t)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right)-u_{xxx}(0,t)=$$

$$-\ (u_{xxx}(0,t)-b\,u_{xx}(0,t)+a\ u_x(0,t))-$$

$$-\lambda_0\left[b\left(u(0,t)+\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 u(x,t)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right)-u_x(0,t)\right]. \qquad (14)$$

Поставляя (14) в (13), получим:

$$(1+\alpha(t)\lambda_0)\,\frac{d}{dt}\left[b\left(u(0,t)+\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 u(x,t)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right)-u_x(0,t)\right]+$$

$$+u_{xxx}(0,t)-b\,u_{xx}(0,t)+a\ u_x(0,t)=$$

$$=(p\,(t)-\lambda_0)\left[b\left(u(0,t)+\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 u(x,t)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right)-u_x(0,t)\right](0\le t\le T)\ , \qquad (15)$$

Отсюда в силу (4) находим:

$$(1+\alpha(t)\lambda_0)\,\omega'\,(t)=(p\,(t)-\lambda_0)\,\omega\,(t)=0\ \ (0\le t\le T)\ , \qquad (16)$$

где

$$\omega\,(t)\ \equiv b\left(u(0,t)+\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 u(x,t)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right)-u_x(0,t)\ \ (0\le t\le T). \qquad (17)$$

Далее, в силу (2) и с учётом (8), находим:

$$\omega\,(0)\ = b\left(\varphi(0)+\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 \varphi(x)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right)-\varphi'(0)=0\,. \qquad (18)$$

Из (16) и (18) ясно, что $\omega\,(t)\ =0\ \ (0\le t\le T)$. Следовательно, из (17) получаем, что выполняется условие (11).

Далее, дифференцируя (5) получаем:

$$u_t(x_0,t) = \gamma(t)u(x_0,t) + h'(t) \ (0 \le t \le T). \tag{19}$$

Подставляя в уравнение (1) $x = x_0$ имеем:

$$u_t(x_0,t) - \alpha(t)u_{txx}(x_0,t) - \beta(t)u_{xx}(x_0,t) = p(t)u(x_0,t) + f(x_0,t)\,. \tag{20}$$

Отсюда, с учетом (5) и (16), приходим к выполнению (12).

Теперь предположим, что $\{u(x,t), p(t)\}$ является решением задачи (1)-(5), (11),(12) причем выполнено условие согласования (10). Тогда, из (15), с учетом (11), приходим к выполнению (4).

Далее, из (12) и (20), получаем:

$$\frac{d}{dt}\left(u(x_0,t) - \left(\int_0^t \gamma(\tau)u(x_0,\tau)d\tau + h(t)\right)\right) =$$

$$= p(t)\left(u(x_0,t) - \left(\int_0^t \gamma(\tau)u(x_0,\tau)d\tau + h(t)\right)\right) \quad (0 \le t \le T).$$

Введем обозначение:

$$y(t) \equiv u(x_0,t) - \left(\int_0^t \gamma(\tau)u(x_0,\tau)d\tau + h(t)\right) \ (0 \le t \le T) \tag{21}$$

и запишем последнее соотношение в виде:

$$y'(t) = p(t)y(t) \ \ (0 \le t \le T). \tag{22}$$

Из (21), с учетом (2) и (6), нетрудно видеть, что

$$y(0) = \varphi(x_0) - h(0) = 0. \tag{23}$$

Очевидно, что задача (22),(23) имеет только тривиальное решение .Тогда, из (21) ясно, что выполняется условие (5). Теорема доказана.

3. Сведения из теории спектральных задач и введение некоторых пространств

Решая однородную задачу, соответствующую задаче (1)-(3), (9), методом разделения переменных приходим к спектральной задаче [6,7]:

$$y''(x) + \lambda \ \ y(x) = 0, \quad 0 \le x \le 1$$

$$y(1) = 0, \ b\left(y(0) + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 y(x)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right) - y'(0) = 0. \tag{24}$$

Известно [30], что спектральная задача (6),(7) эквивалентна спектральной задаче (24) без собственной функции, соответствующей собственному значению λ_0. Следовательно, спектральная задача (24) имеет только собственные функции $y_k(x) = \sqrt{2}\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\,(1-x)\right)$,$k = 1,\ 2,\ ...$ с положительными собственными числами λ_k, определяемые из уравнения $tg\sqrt{\lambda} = (a-\lambda)/(b\sqrt{\lambda})$, пронумерованные в порядке возрастания.

В работе [6,7] сформулированы и обоснованы следующие утверждения.

Лемма 1. *Начиная с некоторого номера N имеют место оценки*

$$0 < \sqrt{\lambda_k} - \frac{\pi}{2} - \pi(k-1) < \frac{b}{\frac{\pi}{4} + \pi(k-1)}.$$

Следствие 1. *Пусть $v_k(x) = \sqrt{2}\sin(\sqrt{\mu_k}(1-x))$, где $\sqrt{\mu_k} = \pi/2 + \pi(k-1)$, $k = 1,2,3,....$ Тогда справедливы неравенства*

$$\|y_k(x) - v_k(x)\|_{C[0,1]} \le \sqrt{2}b/(\pi/4 + \pi(k-1)) \ , \ \ k \ge N \ ,$$

$$\sum_{k=N}^{\infty} \|y_k(x) - v_k(x)\|^2_{L_2(0,1)} \le b^2 \sum_{k=N}^{\infty} \frac{2}{3(\pi/4 + \pi(k-1))^2}. \qquad (25)$$

Лемма 2. *Биортогонально сопряженная система $\{z_k(x)\}$ к системе $\{y_k(x)\}$, $k = 1,2,3,...$, определяется по формуле*

$$z_k(x) = \sqrt{2}(\sin(\sqrt{\lambda_k}(1-x)) - \sqrt{\lambda_0}\cos\sqrt{\lambda_k}(\sin\sqrt{\lambda_0}(1-x))/(\sqrt{\lambda_k}\cos\sqrt{\lambda_0}))/(1+$$

$$+b^{-1}\cos^2\sqrt{\lambda_k} + (b\lambda)^{-1}a\cos^2\sqrt{\lambda_k}).$$

Теорема 2. *Системы $\{y_k(x)\}$ и $\left\{\sqrt{2}\cos(\sqrt{\lambda_k}(1-x))\right\}$, $k = 1,2,...$, являются базисами Рисса в пространстве $L_2(0,1)$.*

Пусть $\eta_k(x) = \sqrt{2}\cos(\sqrt{\lambda_k}(1-x))$, $\xi_k(x) = \sqrt{2}\cos(\sqrt{\mu_k}(1-x))$ $\quad k = 1,2,3,...$.

Тогда , аналогично (25), справедливы неравенства

$$\|\eta_k(x) - \xi_k(x)\|_{C[0,1]} \le \sqrt{2}b/(\pi/4 + \pi(k-1)) \ , \ \ k \ge N \ ,$$

$$\sum_{k=N}^{\infty} \|\eta_k(x) - \xi_k(x)\|^2_{L_2(0,1)} \le b^2 \sum_{k=N}^{\infty} \frac{2}{3(\pi/4 + \pi(k-1))^2}. \qquad (26)$$

Предположим, что $g(x) \in L_2(0,1)$. Тогда, с учетом (25), получаем:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^1 g(x)y_k(x)dx\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le M\ \|g(x)\|_{L_2(0,1)}, \qquad (27)$$

где

$$M = \left\{\sum_{k=1}^{N}\int_0^1 y_k^2(x)dx + 2b^2\sum_{k=N}^{\infty}\frac{2}{3\left(\frac{\pi}{4} + \pi(k-1)\right)^2} + 2\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (28)$$

Аналогично (27), с учетом (26), находим:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^1 g(x)\eta_k(x)dx\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq M\ \|g(x)\|_{L_2(0,1)}\,. \tag{29}$$

Так как функции $\{y_k(x)\},\ k=1,2,3,...$ являются базисами Рисса в пространстве $L_2\,(0,1)$, тогда известно [43] , что для любой функции $g(x)\in L_2\,(0,1)$ справедливо равенство:

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k\cdot y_k(x), \tag{30}$$

где

$$g_k=\int_0^1 g(x)z_k(x)dx\,(k=1,2,...).$$

Далее , с учетом (27), нетрудно видеть, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} g_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq M_0\,\|g(x)\|_{L_2(0,1)}\,, \tag{31}$$

где

$$M_0=2\left[M+\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\left|\cos\sqrt{\lambda_0}\right|}\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)^{\frac{1}{2}}\|y_0(x)\|_{L_2(0,1)}\right]. \tag{32}$$

Предположим, что
$g(x)\in C[0,1]\,,\ g'\,(x)\in L_2(0,1)$ и $g(1)=0$.
Тогда имеем:

$$g_k=-\frac{\sqrt{2}}{\alpha_k}\cdot\frac{b}{a-\lambda_k}\left(g(0)+\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 g(x)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right)\sin\sqrt{\lambda_k}-$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{\alpha_k}\cdot\frac{1}{\lambda_k}\int_0^1 g'(x)\cos(\sqrt{\lambda_k}(1-x))dx, \tag{33}$$

где

$$\alpha_k=1+\frac{\cos^2\sqrt{\lambda_k}}{b}+\frac{a\cos^2\sqrt{\lambda_k}}{b\lambda_k}>1.$$

Отсюда, с учетом (29), находим:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{\lambda_k}\,|g_k|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 2bm_0\left|g(0)+\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 g(x)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right|+2M\left\|g'(x)\right\|_{L_2(0,1)}, \tag{34}$$

где

$$m_0 = \sup_k \left(\frac{\lambda_k}{|\lambda_k - a|}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\right)^{1/2}.$$

Пусть
$g(x) \in C^1[0,1]$, $g''(x) \in L_2(0,1)$, $g(1) = 0$ и

$$J(g) \equiv b\left(g(0) + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}} \int_0^1 g(x)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right) - g'(0) = 0.$$

Тогда из (33) получаем:

$$g_k = -\frac{\sqrt{2}}{\alpha_k}\left[\frac{a^2}{\lambda_k^2(a-\lambda_k^2)}g'(0) - \frac{a}{\lambda_k^2}g'(0)\right]\sin\sqrt{\lambda_k} -$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{\alpha_k} \cdot \frac{1}{\lambda_k}\int_0^1 g''(x)\sin(\sqrt{\lambda_k}(1-x))dx. \tag{35}$$

Отсюда, с учетом (27), находим:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\,|g_k|)^2\right)^{1/2} \le m_1\left|g'(0)\right| + \sqrt{2}M\left\|g''(x)\right\|_{L_2(0,1)}, \tag{36}$$

где

$$m_1 = 2\left[a^2\left(\sup_k\left|\frac{\lambda_k}{|\lambda_k - a|}\right|\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^4}\right) + a\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}\right)^{1/2}\right].$$

Теперь предположим, что
$g(x) \in C^2[0,1]$, $g'''(x) \in L_2(0,1)$, $g(1) = 0$, $J(g) = 0$ и $g''(1) = 0$.
Тогда из (35) имеем:

$$g_k = -\frac{\sqrt{2}}{\alpha_k}\left[\frac{a^2}{\lambda_k^2(a-\lambda_k)}g'(0) - \frac{ab}{\lambda_k(a-\lambda_k)}g''(0) - \frac{a}{\lambda_k^2}g'(0) + \frac{b}{\lambda_k^2}g''(0)\right]\sin\sqrt{\lambda_k} +$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{\alpha_k}\cdot\frac{1}{\lambda_k\sqrt{\lambda_k}}\int_0^1 g'''(x)\cos(\sqrt{\lambda_k}(1-x))dx. \tag{37}$$

Отсюда, с учетом (29), получаем:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\sqrt{\lambda_k}\,|g_k|)^2\right)^{1/2} \le m_2\left|g'(0)\right| + m_3\left|g''(0)\right| + \sqrt{2}M\left\|g'''(x)\right\|_{L_2(0,1)}, \tag{38}$$

где

$$m_2 = 4\left(a^2\sup_k\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_k - a}\right|\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^3}\right)^{1/2} + a\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)^{1/2}\right], \tag{39}$$

$$m_3 = 4\left(ab\sup_k\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_k - a}\right| \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^3}\right)^{1/2} + b\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}\right)^{1/2}\right]. \tag{40}$$

Пусть

$$g(x) \in C^3\left[0,1\right],\ g^{(4)}(x) \in L_2(0,1),\ g(1) = 0\ ,\ J(g) = 0\ , g''(1) = 0\,,$$
$$g'''(0) - bg''(0) + ag'(0) = 0.$$

Тогда из (37) имеем:

$$g_k = \frac{\sqrt{2}}{\alpha_k}\frac{a^2}{\lambda_k^2(a-\lambda_k)}g'''\left(0\right)\sin\sqrt{\lambda_k} + \frac{\sqrt{2}}{\alpha_k}\cdot\frac{1}{\lambda_k^2}\int_0^1 g^{(4)}(x)\sin(\sqrt{\lambda_k}(1-x))dx. \tag{41}$$

Отсюда, с учетом (27), находим:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\ |g_k|\ )^2\right)^{1/2} \le \sqrt{2}M\left\|g^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} + 2m_4\left|g'''(0)\right|, \tag{42}$$

где

$$m_4 = \sup_k\left(\frac{\lambda_k}{|\lambda_k - a|}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}\right)^{1/2}.$$

Теперь, с целью исследования задачи (1)-(3), (9), (10) рассмотрим следующие пространства:

1. Обозначим через $B_{2,T}^2$ [8] совокупность всех функций $u(x,t)$ вида

   $$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)y_k(x)\ ,$$

   рассматриваемых в D_T, где каждая из функций $u_k(t)$ непрерывна на $[0,T]$ и

   $$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\left\|u_k(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right\}^{1/2} < +\infty.$$

   Норму на этом множестве определим так:

   $$\left\|u(x,t)\right\|_{B_{2,T}^2} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\left\|u_k(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right\}^{1/2}.$$

2. Через E_T^2 обозначим пространство, состоящее из топологического произведения

   $$B_{2,T}^2 \times C[0,T].$$

Норма элемента $z = \{u,p\}$ определяется формулой

$$\left\|z\right\|_{E_T^2} = \left\|u(x,t)\right\|_{B_{2,T}^2} + \left\|p(t)\right\|_{C[0,T]}.$$

Известно, что $B_{2,T}^2$ и E_T^2 являются банаховыми пространствами.

4. Исследование существования и единственности классического решения обратной краевой задачи

Первую компоненту $u(x,t)$ решения $\{u(x,t),p(t)\}$ задачи (1)-(3),(11), (12) будем искать в виде:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)y_k(x)\ , \tag{43}$$

где

$$u_k(t)=\int_0^1 u(x,t)z_k(x)dx\ \ (k=1,2,...).$$

Применим метод разделения переменных для определения искомых коэффициентов $u_k(t)$ $(k=1,2,...;)$ функции $u(x,t)$ из (1), (2) получаем.

$$\left(1+\lambda_k\alpha(t)\right)u_k'(t)+\lambda_k\beta(t)u_k(t)=p(t)u_k(t)+f_k(t)\ \ (k=1,2,...;\ 0\le t\le T)\,, \tag{44}$$

$$u_k(0)=\varphi_k(k=1,2,...), \tag{45}$$

где

$$\varphi_k=\int_0^1\varphi(x)z_k(x)dx\ \ ,f_k(t)=\int_0^1 f(x,t)z_k(t)dx\ \ (k=1,2,...).$$

Решая задачу (44), (45), находим:

$$u_k(t)=\varphi_k e^{-\int_0^t\frac{\lambda_k\beta(s)ds}{1+\lambda_k\alpha(s)}}+\int_0^t\frac{F_k(\tau;u,p)}{1+\lambda_k\alpha(\tau)}e^{-\int_\tau^t\frac{\lambda_k\beta(s)ds}{1+\lambda_k\alpha(s)}}d\tau, \tag{46}$$

где

$$F_k(t;u,p)=f_k(t)+p(t)u_k(t).$$

После подстановки выражения $u_k(t)$ $(k=1,2,\ldots)$ из (44) в (43) имеем:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\varphi_k e^{-\int_0^t\frac{\lambda_k\beta(s)ds}{1+\lambda_k\alpha(s)}}+\int_0^t\frac{F_k(\tau;u,p)}{1+\lambda_k\alpha(\tau)}e^{-\int_\tau^t\frac{\lambda_k\beta(s)ds}{1+\lambda_k\alpha(s)}}d\tau\right\}y_k(x). \tag{47}$$

Теперь из (12), с учётом (43), получим:

$$p(t)=[h(t)]^{-1}\left\{h'(t)-f(x_0,t)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\alpha(t)u_k'(t)+\left(\gamma(t)+\lambda_k\beta(t)\right)u_k(t)+p(t)\int_0^t\gamma(\tau)u_k(\tau)d\tau\right\}y_k(\,x_0)$$

или учитывая , что

$$u_k'(t)=-\frac{\lambda_k\beta(t)}{1+\lambda_k\alpha(t)}u_k(t)+\frac{1}{1+\lambda_k\alpha(t)}F_k\left(t;u,p\right)$$

имеем

$$p(t)=[h(t)]^{-1}\left\{h'(t)-f(x_0,t)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\gamma(t)+\frac{\lambda_k\beta(t)}{1+\lambda_k\alpha(t)}\right)u_k(t)+\frac{\lambda_k\alpha(t)}{1+\lambda_k\alpha(t)}F_k\left(t;u,p\right)\;+\;p(t)\int_0^t u_k(\tau)d\tau\right]y_k(\,x_0)\right\}. \tag{48}$$

Для того, чтобы получить уравнение для второй компоненты $p(t)$ решения $\{u(x,t),p(t)\}$ задачи (1)-(3), (11), (12) подставим выражение (46) в (48):

$$p(t)=[h(t)]^{-1}\left\{h'(t)-f(x_0,t)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\gamma(t)+\frac{\lambda_k\beta(t)}{1+\lambda_k\alpha(t)}\right)\left(\varphi_k e^{-\int_0^t\frac{\lambda_k\beta(s)ds}{1+\lambda_k\alpha(s)}}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\int_0^t\frac{F_k(\tau;u,p)}{1+\lambda_k\alpha(\tau)}e^{-\int_\tau^t\frac{\lambda_k\beta(s)ds}{1+\lambda_k\alpha(s)}}d\tau\right)+\frac{\lambda_k\beta(t)}{1+\lambda_k\alpha(t)}F_k\left(t;u,p\right)+p(t)\int_0^t\gamma(\tau)u_k(\tau)d\tau\right]y_k(\,x_0)\right\}. \tag{49}$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3), (11), (12) свелось к решению системы (47), (49) относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $p(t)$.

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1)-(3), (11),(12) важную роль играет следующая

Лемма 3. *Если* $\{u(x,t),p(t)\}$ *- любое решение задачи* (1)-(3), (11),(12) *, то функции*

$$u_k(t)=\int_0^1 u(x,t)z_k(x)dx(k=1,2,...)$$

удовлетворяют на $[0,T]$ *системе (45).*

Доказательство. Пусть $\{u(x,t),a_0(t)\}$ - любое решение задачи (1)-(3), (11),(12) .

Умножив обе части уравнения (1) на функцию $z_k(x)$ $(k=1,2,...)$, интегрируя полученное равенство по x от 0 до 1 и пользуясь соотношениями

$$\int_0^1 u_t(x,t)z_k(x)dx=\frac{d}{dt}\int_o^1 u(x,t)z_k(x)dx=u_k'(t)\,,$$

$$\int_0^1 u_{xx}(x,t)z_k(x)dx=-\lambda_k\int_o^1 u(x,t)z_k(x)dx\;=-\lambda_k u_k(t),$$

$$\int_0^1 u_{txx}(x,t)z_k(x)dx=-\lambda_k\int_o^1 u_t(x,t)z_k(x)dx\;=-\lambda_k u_k'(t)\,(k=1,2,...)$$

получаем, что удовлетворяется уравнение (44).

Аналогично, из (2) получаем, что выполняется условие (45).

Таким образом, $u_k(t)$ $(k=0,1,...)$ является решением задачи (44), (45). А отсюда, непосредственно следует, что функции $u_k(t)$ $(k=0,1,...)$ удовлетворяют на $[0,T]$ системе (46). Лемма доказана.

Очевидно, что если $u_k(t)=\int_0^1 u(x,t)z_k(x)\,dx$ $(k=1,2,...)$ являются решением системы (46), то пара $\{u(x,t),p(t)\}$ функций $u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)y_k(x)$ и $p(t)$ является решением системы (47), (49).

Из леммы 3 следует, что имеет место следующее

Следствие2. *Пусть система (46), (48) имеет единственное решение. Тогда задача* (1)-(3), (11),(12) *не может иметь более одного решения, т.е. если задача* (1)-(3), (11),(12) *имеет решение, то оно единственно.*

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^2 оператор

$$\Phi(u,a)=\{\Phi_1(u,p),\Phi_2(u,p)\},$$

где

$$\Phi_1(u,p)=\tilde{u}(x,t)\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{u}_k(t)y_k(x),$$

$$\Phi_2(u,p)=\tilde{p}(t),$$

а $\tilde{u}_k(t)$ $(k=1,2,...)$ и $\tilde{a}_0(t)$ равны , соответственно, правым частям (45) и (48). Нетрудно видеть, что

$$1+\lambda_k\alpha(t)>\lambda_k\alpha(t),\quad \frac{\lambda_k\beta(t)}{1+\lambda_k\alpha(t)}<\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}.$$

Учитывая эти соотношения имеем:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^2\ \|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}\leq\sqrt{3}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^2\ \ |\varphi_k|\right)^2\right)^{1/2}+\left\|\frac{1}{\alpha(t)}\right\|_{C[0,T]}\sqrt{3}\times$$

$$\times\left[\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\left|f_k(\tau)\right|\right)^2d\tau\right)^{1/2}+T\left\|p(t)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^2\ \|u_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right], \tag{50}$$

$$\|\tilde{p}(t)\|_{C[0,T]}\leq\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left\{\left\|h'(t)-f(x_0,t)\right\|_{C[0,T]}+\right.$$

$$+\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-1}\right)^{1/2}\left[\left(\|\gamma(t)\|_{C[0,T]}+\left\|\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}\right\|_{C[0,T]}\right)\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{\lambda_k}\,|\varphi_k|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\right.\right.$$

$$\left\|\frac{1}{\alpha(t)}\right\|_{C[0,T]}\left(\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(|f_k(\tau)|)^2\,d\tau\right)^{1/2}+\right.$$

$$\left.\left.+T\left\|p(t)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\ \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2}\right)\right)+$$

$$+\left\|\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}\right\|_{C[0,T]}\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k(t)\|_{C[0,T]}^2\right)^{1/2}+\|p(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\ \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2}\right)\right)+$$

$$+T\left\|\gamma(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|p(t)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\left\|u_k(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2}\Bigg]\Bigg\}. \tag{51}$$

Предположим, что данные задачи (1)-(3), (11), (12) удовлетворяют следующим условиям:

$$1.\varphi(x)\in C^3[0,1],\varphi^{(4)}(x)\in L_2(0,1),\ \varphi(1)=0\ ,\ J(\varphi)=0\ ,\varphi''(1)=0\,,$$

$$\varphi'''(0)-b\varphi''(0)+a\varphi'(0)=0.2.f(x,t),$$

$$f_x(x,t)\in C(D_T),\ f_{xx}(x,t)\in L_2(D_T), f\ (1,t)=0, J\left(f\right)=0\left(0\le t\le T\right).$$

$$3.0<\alpha(t)\in C[0,T], 0<\beta(t)\in C[0,T],\quad h(t)\in C^1[0,T],\quad h(t)\neq 0(0\le t\le T).$$

Тогда из (49) и (50), с учётом (41), соответственно, получаем:

$$\left\|\tilde{u}(x,t)\right\|_{B_{2,T}^2}\le A_1(T)+B_1(T)\left\|p(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|u(x,t)\right\|_{B_{2,T}^2}, \tag{52}$$

$$\left\|p(t)\right\|_{C[0,T]}\le A_2(T)+B_2(T)T\left\|p(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|u(x,t)\right\|_{B_{2,T}^2}, \tag{53}$$

где

$$A_1(T)=\sqrt{6}M\left\|\varphi^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+2\sqrt{3}m_4\left|\varphi'''(0)\right|+$$

$$+\left\|\frac{1}{\alpha(t)}\right\|_{C[0,T]}\sqrt{3T}\left(\sqrt{2}M\left\|f_{xx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}+m_1\left\|f_x(0,t)\right\|_{C[0,T]}\right),$$

$$B_1\left(T\right)=\sqrt{3}\left\|\frac{1}{\alpha(t)}\right\|_{C[0,T]}T,$$

$$A_2(T)=\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left\{\left\|h'(t)-f(x_0,t)\right\|_{C[0,T]}+\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-1}\right)^{1/2}\times\right.$$

$$\times\left[\left(\left\|\gamma(t)\right\|_{C[0,T]}+\left\|\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}\right\|_{C[0,T]}\right)\left(2bm_0\left|\varphi(0)+\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1\varphi(x)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right|+\right.\right.$$

$$\left.+2M\left\|\varphi'(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\left\|\frac{1}{\alpha(t)}\right\|_{C[0,T]}\sqrt{T}M\left\|f(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}\right)+$$

$$\left.\left.+\left\|\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}\right\|_{C[0,T]}\left\|\left\|f(x,t)\right\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)}\right]\right\},$$

$$B_2(T)=\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\left\|\gamma(t)\right\|_{C[0,T]}+\left\|\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}\right\|_{C[0,T]}\right)\left\|\frac{1}{\alpha(t)}\right\|_{C[0,T]}T+\right.$$

$$\left.+\left\|\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}\right\|_{C[0,T]}+T\left\|\gamma(t)\right\|_{C[0,T]}\right],$$

Из неравенств (52), (53) заключаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B^2_{2,T}} + \|\tilde{p}(t)\|_{C[0,T]} \le A(T) + B(T)\,\|p(t)\|_{C[0,T]}\,\|u(x,t)\|_{B^2_{2,T}}\,, \tag{54}$$

где

$$A(T) = A_1(T) + A_2(T),\;\; B(T) = B_1(T) + B_2(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему:

Теорема3. *Пусть выполнены условия1-3 и*

$$(A(T)+2)^2 B(T) < 1. \tag{55}$$

Тогда задача (1)-(3),(11), *(12) имеет в шаре* $K = K_R(\|z\|_{E^2_T} \le R = A(T)+2)$ *пространства* E^2_T *единственное решение.*

Доказательство. В пространстве E^2_T рассмотрим уравнение

$$z = \$z, \tag{56}$$

где $z = \{u,p\}$, компоненты $\Phi_i(u,p)(i=1,2)$ оператора $\$(u,p)$ определены правыми частями уравнений (47), (49), соответственно. Рассмотрим оператор $\$(u,p)$ в шаре $K = K_R(\|z\|_{E^2_T} \le R = A(T)+2)$ из E^2_T.

Аналогично (54) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E^2_T} \le A(T) + B(T)\,\|p(t)\|_{C[0,T]}\,\|u(x,t)\|_{B^2_{2,T}} \tag{57}$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E^2_T} \le B(T)R\left(\|p_1(t)-p_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t)-u_2(x,t)\|_{B^2_{2,T}}\right). \tag{58}$$

Тогда из оценок (57) и (58), с учетом (55), следует, что оператор $\$$ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор $\$$имеет единственную неподвижную точку $\{u,p\}$, которая является единственным решением уравнения (56), т.е. является единственным в шаре $K = K_R$ решением системы (47), (49).

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B^2_{2,T}$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x,t)$,$u_{xx}(x,t)$и $u_{xxx}(x,t)$ в D_T.

Из (29) нетрудно видеть, что $u_t(x,t)$ непрерывна в D_T.

Нетрудно проверить, что уравнение (1) и условия (2),(3), (11) и (12) выполняются в обычном смысле. Таким образом, решением задачи (1)–(3), (11) ,(12) является пара функций $\{u(x,t), p(t)\}$. В силу следствия леммы 3 оно единственно в шаре $K = K_R$.Теорема доказана.

С помощью теоремы 1 и 3 получаем однозначную разрешимость задачи (1)–(5).

Теорема 4. *Пусть выполняются все условия теоремы 3и выполнены условия согласования*

$$\varphi(x_0) = h(0).$$

Тогда задача (1)-(5) *имеет в шаре* $K = K_R(\|z\|_{E^2_T} \le R = A(T)+2)$ *пространства* E^2_T *единственное классическое решение.*

Список литературы

[1] Тихонов А.И. Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР.-1943.-39. No 5.-с. 195-198.

[2] Лаврентьев М.М. Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР.-1964.-157. No 3.-с. 520-521.

[3] Лаврентьев М.М. , Романов В.Г., Шишатский С.Т. Некорректные задачи математической физики и анализа.- М:Наука. 1980. 288с

[4] Иванов В.К., Васин В.В., Танина В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения .-М.: Наука. 1978. 206с.

[5] Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач.- М: МГУ. 1994. 206с.

[6] Капустин, Н.Ю, Е.И.Моисеев. О сходимости спектральных разложений функций из класса Гёльдера для двух задач со спектральным параметром в граничном условии ,Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, No 8. – С. 1069–1074.

[7] Моисеев, Е.И., Капустин Н.Ю. Об особенностях корневого пространства одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии , Докл. АН. – 2002. – Т. 385, No 1. – С. 20–24.

[8] Худавердиев, К.И., Велиев А.А. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой– . – Баку : Чашыоглы, 2010. – 168 с.

Я.Т. Мегралиев
Бакинский государственный университет
*Email:*yashar_aze@mail.ru

А.И. Исмаилов
Бакинский государственный университет