Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 9, No 2, 2019, July
ISSN 2222-5498

Об оценках типа Вимана-Валирона для решения задачи Коши

Д.Е. Фараджли

Аннотация. В данной статье установливаются оценки типа Вимана-Валирона для решений Коши для дифференциального операторного уравнения в гильбертовом пространстве. При определенных условиях на символы псевдодифференциальных операторов получаем оценки решения характеризующие поведедние решения при $t \to 0$.
Ключевые слова: Целые функции, вероятность, случайная величина, максимум модуля, максимальный член ряда, оценка типа Вимана-Валирона, функция распредления, дифференциальный оператор, исключательное множество, преобразование Фурье.

1. Введение

Пусть $f(z) = \sum\limits_{0}^{\infty} a_n z^n$-целая функция,

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad \mu(r) = \max_{n} |a_n| r^n$$

-максимум модуля и максимальный член функции $f(z)$ в круге $|z| \leq r$. По известному результату Вимана [1] и Валирона [2] справедлива следующая оценка

$$M(r) \leq c\mu(r) (\log \mu(r))^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \tag{1}$$

Причем она может нарушаться только на множестве конечной логарифмической меры. Имеется обширная теория Вимана-Валирона в области степенных рядов, рядов Дирихле, многомерных целых функций и др.

В 1963 г. американский математик Розенблюм [3] получил более общий и точный результат об оценке $M(r)$ сверху через $\mu(r)$. Для некоторого класса растущих функций $\varphi(y) > 0$ он установил следующую оценку

$$M(r) \leq c\mu(r) \sqrt{\varphi (\log M(r))}. \tag{2}$$

(вне некоторого множества $E \subset (0, \infty)$ конечной логарифмической меры). В работах Н.М. Сулейманова (см. [4]) впервые были установлены аналогичные оценки для решений дифференциальных операторных уравнений вида

$$u'(t) \pm A(t)u(t) = 0, \tag{3}$$

где $A(t)$-положительный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H с чисто дискреным спектром, в которых роль функций $M(r)$ и $\mu(r)$ в (2) играют соответственно функции $M(t) = \|u(t)\|$ и $\mu(t) = \max\limits_{k} |(u(t),\ \varphi_k(t))|$, где $\{\varphi_k(t)\}$ есть ортонормированная система собственных функций оператора $A(t)$ в (3).

Для получения таких оценок типа Вимана-Валирона был построен специальный метод, основанный на вероятности, позволяющий найти такую растущую функцию $\psi(y) > 0$, что выполянется оценка типа

$$\|u(t)\| \leq \psi\left(\mu(t)\right),\ \mu(t) \to \infty \tag{4}$$

при $t \to 0$. Такие оценки мы называем оценками типа Вимана-Валирона. При этом существенно наличие асимптотических формул с оценками остатка для функции распредления $N(\lambda)$ собственных значений оператора $A(t)$ в уравнении (3).

2. Постановка задачи

В данной статье ставится задача об установлении оценки типа Вимана-Валирона для решений задачи Коши для параболических операторных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + A(t, D_x)u(t,x) = 0, \tag{5}$$

в силе $(0,T) \times R^n$,

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in R^n, \tag{6}$$

где $A(t, D_x)$-(псевдо) дифференциальный оператор в R^n с символом $A(t,\xi)$, $ReA(t,\xi) > 0$, $u_0(x)$ обобщенная функция (в частности, $u_0(x) = \delta(x)$-функция Дирака), $D_x = \frac{1}{i} qrad_x$.

Сразу отметим, что методы построение для исследования оценок типа Вимана-Валирона для краевых задач для уравнений вида (3) с оператором $A(t)$ с дискретным спектром для задачи Коши не проходят. Здесь приходится конструировать новый метод, основанный на непрерывных распредлениях случаных величин. Такой метод был построен в работах Н.М. Сулейманов (см.[4], стр. 121).

3. Основные результаты

После применения преобразования Фурье из (5)-(6) получим двойственную задачу вида

$$\frac{\partial \widetilde{u}(t,\xi)}{\partial t} + \widetilde{A}(t,\xi)\widetilde{u}(t,\xi) = 0, \tag{7}$$

$$\widetilde{u}(0,\xi)=\widetilde{u}_0(\xi). \tag{8}$$

Решение исходной задачи запишется в виде

$$u(t,x)=F^{-1}\left[e^{-\int\limits_0^t Re\widetilde{A}(\tau,\xi)d\tau}\widetilde{u}_0(\xi)\right]\ ,$$

где F^{-1}-обратное преобразование Фурье. Имеем равенство:

$$\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(R^n)}=\int e^{-2\int\limits_0^t Re\widetilde{A}(\tau,\xi)d\tau}\ |\widetilde{u}_0(\xi)|^2\,d\xi.$$

(Для простоты в дальнейшем будем считать $A(t,\xi)$-вещественной функцией).

Обозначим:

$$g(t)=\frac{1}{2}\log\left(u(t,x),\ u(t,x)\right),$$

$$l(t,\xi)=\int\limits_0^t\widetilde{A}(\tau,\xi)d\tau,\quad d\mu(\xi)=|\widetilde{u}_0(\xi)|^2\,d\xi,$$

$$m_\sigma=\left\{\xi\in R^n:\ \widetilde{A}(\tau,\xi)>\sigma\right\}\ .$$

Введем семейство случайных величин X с непрерывным распределением (зависящим от параметра t):

$$P\left(X\in m_\sigma\right)=\int\limits_{m_\sigma}\exp\left(-2l(t,\xi)\right)d\mu(\xi)/\int\limits_{R^n}\exp\left(-2l(t,\xi)\right)d\mu(\xi).$$

Вычислив $g'(t),\ g''(t)$, математическое ожидание MX, дисперсию DX и применить неравенство Чебышева находим (значениями X являются числа $x=\widetilde{A}(t,\xi)$) :

$$MX=-g'(t),\quad 2DX\le g''(t)-k(t)g'(t),\quad g'(t)\le 0.$$

Следующая Лемма доказана в книге Сулейманова ([4], стр. 121):

Лемма 7.1 Справедливо неравенство

$$e^{2g(t)}\le c\mu(t)^2\ S(t,g',g''), \tag{9}$$

где

$$S(t,a,b)=\underset{\xi}{mes}\left\{\xi:\left|\widetilde{A}(t,\xi)-a\right|\le c\sqrt{b+k(t)a}\right\}, \tag{10}$$

$$\mu(t)^2=ess\sup_\xi\left(e^{-2l(t,\xi)}\left|\widetilde{u}_0(\xi)\right|^2\right). \tag{11}$$

Основной результат статьи содержится в следующей теореме:

Теорема. Пусть $\varphi(y)$-положительная непрерывная возрастающая функция такая, что

$$\int\limits_1^\infty \left(\int\limits_1^y \varphi(t)dt\right)^{-\frac{1}{2(s+1)}} dy < \infty, \quad s \geq 0. \tag{12}$$

Пусть при $\lambda > \delta > 0,\ \lambda \to +\infty$ выполнено условие вида

$$mes_n \left\{\xi \in R^n \left| Re\widetilde{A}(t,\xi) - \lambda\right| < \delta\right\} \leq c\delta\lambda^s(1+\lambda^v), \quad 0 < v < 1.$$

Пусть еще при почти всех t выполнено условие

$$\frac{\partial}{\partial t} A(t,\xi) \leq K(t)A(t,\xi), \quad 0 \leq K(t) \in L_1(0,T).$$

Тогда вне множества конечной логарифмической меры для решения $u(t,x)$ задачи Коши (5)-(6) справедлива следующая оценка типа Вимана-Валирона-Розенблюма:

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(R^n)} \leq c\mu(t) \cdot t^{-\gamma} \sqrt[4]{\varphi\left(t^{-\beta} \log \|u(t,\cdot)\|_{L_2(R^n)}\right)}, \tag{13}$$

где $0 < \beta < 1, \quad \gamma > 0$-определяется через $s, \mu(t)$ определяется формулой (11).

Доказательство. Отметим, что условию (12) удовлетворяют функций

$$\varphi(y) = y^{2s=1+\varepsilon}$$

или $\varphi(y) = y^{2s+1}(\log y)^{2(s+1)}(\log\log y)^{2(s+1)}...(\log_n y)^{2(s+1)+\varepsilon}$.

Введем новые функции, полагая:

$$\xi(t) = \int\limits_0^t e^{\int\limits_0^y k(\tau)d\tau} dy,$$

$$\widetilde{h}(\xi) = h(t(\xi)),$$

где $t(\xi)$ обратная функция к $\xi(t)$. Получим:

$$g' = \exp\left\{\int\limits_0^t k(\tau)d\tau\right\}\widetilde{g}'(\xi), \tag{14}$$

$$g'' - k(t)g' = \exp\left\{2\int\limits_0^t k(\tau)d\tau\right\}\widetilde{g}''(\xi), \tag{15}$$

Определим $\lambda(t)$ и $\delta(t)$ следующим образом:

$$\lambda(t)=\left|g'(t)\right|-\frac{1}{2}\sqrt{g''+k(t)\left|g'(t)\right|}=\exp\left(\int\limits_0^t k(\tau)d\tau\right)\left[\widetilde{g}'(\xi)-\frac{1}{2}\sqrt{\widetilde{g}''(\xi)}\right],$$

$$\delta(t)=\sqrt{g''(t)-k(t)\left|g'(t)\right|}\subset\exp\left\{\int\limits_0^t k(\tau)d\tau\right\}\sqrt{\widetilde{g}''(\xi)}.$$

Рассмотрим два случая:
1) $2\left|g'(\xi)\right|>3\sqrt{\widetilde{g}''(\xi)}$,

2) $2\left|g'(\xi)\right|\le 3\sqrt{\widetilde{g}''(\xi)}$.
В случае 1) имеем: $\lambda(t)>\delta(t)>0$ и

$$mes_n\left\{\xi:\left|\widetilde{A}(t,\xi)-\lambda(t)\right|<\delta(t)\right\}\le c\sqrt{g''(\xi)}\cdot\left|\widetilde{g}'(\xi)\right|^s.$$

В случае 2) получим:

$$mes_n\left\{\xi\in R^n:\left|\widetilde{A}(t,\xi)-\lambda(t)\right|<\delta(t)\right\}\le c\left[g''(\xi)\right]^{\frac{s+1}{2}}.$$

В результате (учитывая условие (10)) мы получаем неравеснтво (вне множества конечной логарифмической меры):

$$mes_n\left\{\xi\in R^n:\left|\widetilde{A}(t,\xi)-g'(t)\right|<c\sqrt{g''(\xi)-k(t)\left|g'(t)\right|}\right\}=$$

$$=S(t,g',g'')\le t^{-\gamma}\sqrt{\varphi\left(t^{-\beta}g(t)\right)}.$$

Отсюда, в силу ключевой Леммы, имеем

$$\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(R^n)}\le c\mu^2(t)t^{-\gamma}\sqrt[4]{\varphi\left(t^{-\beta}\log\|u(t,\cdot)\|\right)},\qquad(16)$$

где $\gamma=[2s(1-\beta)+2-\beta]\,4$.

В частности, при $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=\frac{2s+3}{8}$, $\varphi(y)=y^{2s+1+\varepsilon}$, из (16) получим:

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(R^n)}\le\widetilde{\mu}(t)\left[\log\widetilde{\mu}(t)\right]^\gamma,\quad\gamma=\frac{2s+1}{4}+\varepsilon.$$

Пример. Рассмотрим фундаментальное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u(t,x)=\frac{\theta(t)}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right),\quad x\in R^n,$$

где $\theta(t)$-функция Хевисайда, $A(t,D_x)=-\triangle$-оператор Лапласа, $u_0(x)=\delta(x)$ функция Дирака, $\widetilde{u}_0(\xi)=1$, $\widetilde{A}(t,\xi)=|\xi|^2$, $l(t,\xi)=t\,|\xi|^2$. Следовательно, имеем:

$$\mu^2(t) = \sup_\xi \left(e^{-2l(t,\xi)} |u_0(\xi)|^2\right) = 1.$$

Тогда из общей оценки (11) получим

$$\|u(t,\cdot)\| \le \frac{c}{t^{\frac{n}{4}+\varepsilon}}, \quad t \to +0.$$

Если рассмотреть задачу Коши для уравнения вида

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + (-\triangle_x)^{\frac{\sigma}{2}} u(t,x) = 0, \quad \sigma > 0,$$

то поулчим: $A(t,\xi) = |\xi|^\sigma, \quad s = \frac{n}{\sigma} - 1,$

$$\mu(t) = \sup_\xi \left(e^{-t|\xi|^\sigma} |\widetilde{u}_0(\xi)|\right).$$

Тогда, вне множества конечной логарифмической меры для решения этой задачи Коши спревадлива оценка вида:

$$\|u(t,\cdot)\| \le \widetilde{\mu}(t) \left(\log \widetilde{\mu}(t)\right)^\gamma,$$

где $\widetilde{\mu}(t) = t^{-\frac{n}{2\tau}+\varepsilon}\mu(t)$.

Список литературы

[1] Wiman A. // Acta Math. 1916, v. 41, p. 1-58.

[2] Валирон Ж. Аналитические функции. М., 1957, -235 с.

[3] Rosenbloom P.C. Probability and entire functions // Studies in Mth. Anal. and related Topics. California: Stanford. Univ. Press, 1963, p. 325-332.

[4] Сулейманов Н.М. Вероятность, целые функции и оценки типа Вимана-Валирона для эволюционных уравнений. Издательство Московского университета.

[5] Теоремы типа Вимана-Валирона для параболических уравнений в гильбертовом пространстве // Мат. сб. 1981. - Т. 115 (157), No 5. -С. 74-97.

[6] О поведении решений задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений в неограниченных областях // ДАН СССР. 1978. -Т. 239, No 4. -С. 429-432.

[7] Теоремы типа Вимана-Валирона для обратно-параболических уравнений в гильбертовом пространстве // Дифференц. уравнения. 1980. -Т. 16, No 10, -С.1816-1825.

[8] Об оценках типа Вимана-Валирона для эволюционных уравнений. Журнал "Дифференциальные уравнения 2017. -Т. 53, No 8, -С. 1090-1097.

[9] Suleymanov N.M., Farajli D.E., Vugar S.Khalilov. "Probability method and Wiman-Valiron type estimates for differential equations". Transactions of NAS of Azerbaijan, 37 (4), 168-175, (2017).

[10] Suleymanov N.M., Farajli D.E. On Wiman-Valiron type estimations for evolution equations. Caspian journal of applied mathematics, ecology and economics, 2017, vol. 5, No 2, p. 86-93.

[11] Сулейманов Н.М., Фараджли Д.Е. Об оценках типа Вимана-Валирона для степенных рядов с конечным радиусом сходимости. 2018, -Т. 8, No 1, -С. 62-68.

[12] Сулейманов Н.М., Фараджли Д.Е. Об оценках типа Вимана-Валирона для эволюционных уравнений. Международная конференция "Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXIX посвященная 90-летию В.А.Ильина. 2-6 май, 2018, -216 с.

Д.Е. Фараджли
Институт математики и механики, Аз1141, Баку, Азербайджан
E-mail: dunya.farajli@mail.ru

Received 23 December 2018
Accepted 20 January 2019