Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 3, No 1, 2013, September
ISSN 2222-5498

Глобальная Разрешимость Задачи Коши для Бесконечной Системы Нелинейных Дифференциальных Уравнений

Г.М.Масмалиев

Аннотация. Рассматривается некоторое обобшение цепочек Тоды и Вольтерра. Доказана глобальная разрешимость задачи Коши для такой цепочки.

Key Words and Phrases: нелинейная цепочка, задача Коши, быстроубывающее решение, глобальная разрешимость.

2000 Mathematics Subject Classifications: 30C10, 30C15

Хорошо известны(см.[1] ,[2] и литературу в них) применения метода обратной задачи рассеяния к интегрировнию нелинейных цепочек таких, как цепочек Тоды и Вольтерра. При реализации этого метода особую роль играет глобальная разрешимость задачи.

Рассмотрим задачу Коши для следующей нелиненой цепочки:

$$\left\{\begin{array}{l} \dot a_n = \frac{\alpha}{2} a_n(b_n - b_{n+1}) + \frac{\beta}{2} a_n(a_{n-1}^2 - a_{n+1}^2 + b_n^2 - b_{n+1}^2), \\ \dot b_n = \alpha(a_{n-1}^2 - a_n^2) + \beta\left[a_{n-1}^2(b_{n-1} + b_n) - a_n^2(b_n + b_{n+1})\right], \\ a_{-1} = 0, \quad \cdot = \frac{d}{dt}, \quad n = 0,\ 1,\ ..., \end{array}\right. \tag{1}$$

$$\begin{array}{l} a_n(0) = a_n^0 > 0,\ b_n(0) = b_n^0, \\ \sum_{n=1}^{\infty}(1+n)\left\{\left|a_n^0 - 1\right| + \left|b_n^0\right|\right\} < \infty. \end{array} \tag{2}$$

Заметим, что система уравнений (1) является обобщением цепочки Тоды (при $\alpha = 1,\ \beta = 0$) и цепочки Вольтера (при $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ b_n \equiv 0$).

Пусть E- банахово пространство последовательностей $x(t) = (x_{1,n},\, x_{2,n})_{n=0}^{\infty}$ с нормой

$$\|x(t)\|_E = \sum_{n=1}^{\infty}(1+n)\left\{|x_{1,n}| + |x_{2,n}|\right\}.$$

Обозначим через $C\left([0,\,T]\,;\,E\right)$ банахово пространство непрерывных на $[0,\,T]$ функций $x(t)$ со значениями в E относительно нормы

$$\|x(t)\|_{C([0,\,T];\,E)} = \max_{0\le t\le T} \|x(t)\|_E$$

Решение $(a_n(t),\,b_n(t))_{n=0}^{\infty}$ полубесконечной цепочки (1) назовем быстро убывающим, если $x(t) = (x_{1,n}(t),\,x_{2,n}(t))$, где $x_{1,n}(t) = a_n(t) - 1,\quad x_{2,n}(t) = b_n(t)$, при любом $T > 0$ удовлетворяет условию

$$\|x(t)\|_{C([0,\,T];\,E)} < \infty. \tag{3}$$

В настоящей работе исследуется вопрос о существовании быстроубывающего решения задачи (1),(2).

Теорема 1. *Решение задача* (1)*,(2) существует и единственно в классе (3).*

Доказательство. Положив, $x_{1,n} = a_n - 1,\quad x_{2,n} = b_n$, запишем систему уравнений (1) в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,n} = \frac{\alpha}{2} x_{1,n}(x_{2,n} - x_{2,n+1}) + \frac{\alpha}{2}(x_{2,n} - x_{2,n+1}) + \\ +\frac{\beta}{2}\left[(x_{1,n}+1)\,(x_{1,n-1} - x_{1,n+1})(x_{1,n-1} + x_{1,n+1} + 2)x_{2,n}^2 - x_{2,n+1}^2\right], \\ \dot{x}_{2,n} = \alpha(x_{1,n-1} - x_{1,n})(x_{1,n-1} + x_{1,n} + 2) + \\ +\beta\left[(x_{1,n-1}+1)^2\,(x_{2,n-1} + x_{2,n}) - (x_{1,n}+1)^2\,(x_{2,n} + x_{2,n+1})\right], \\ n = 0,\ 1,\ ...,\ \ x_{1,-1} = 0,\ \ x_{2,-1} = 0\,. \end{cases} \tag{4}$$

При этом для системы (4) имеем начальные условия

$$x_{1,n}(0) = a_n^0 > 0, \quad x_{2,n}(0) = b_n. \tag{5}$$

Задача (4),(5) стандартным методом сводится к операторному уравнению

$$x(t) = x(0) + \int_0^t F\left(x\left(\tau\right)\right)d\tau, \tag{6}$$

где F- нелинейный оператор, порожденный в $C\left([0,\,T]\,;\,E\right)$ правой частью бесконечной системы уравнений (4). Так как F суть многочлен от переменных $x_{1,n},\ x_{2,n}$ то этот оператор непрерывно дифференцируем. Пользуясь тогда принципом сжатых отображений получаем, что в некотором сегменте $[0,\,\delta]$ интегральное уравнение (6) или же задача (4),(5) имеет единственное решение $x(t) = (x_{1,n}(t),\,x_{2,n}(t))_n$ с конечной нормой $\|x\|_{C([0,\,T];\,E)} < \infty$. Докажем, что это решение продолжило на каждый конечный отрезок $[0,\,T]$. Допустим противное. Тогда существует точка $t^* < T$ такая, что задача (4),(5) имеет непрерывное на интервале $(0,\,t^*)$ решение $x(t) = (x_{1,n}(t),\,x_{2,n}(t))_{n=0}^{\infty}$, но $\overline{\lim_{t\to t^*-0}}\|x(t)\|_E = +\infty$.

В силу (4) имеем:

$$
\begin{aligned}
&x_{1,n}(t)=x_{1,n}(0)+\tfrac{\alpha}{2}\int_0^t x_{1,n}(\tau)\left[x_{2,n}(\tau)-x_{2,n+1}(\tau)\right]d\tau+\\
&\tfrac{\alpha}{2}\int_0^t\left[x_{2,n}(\tau)-x_{2,n+1}(\tau)\right]d\tau+\\
&+\tfrac{\beta}{2}\int_0^t x_{1,n}(\tau)\left[\left(x_{1,n-1}(\tau)-x_{1,n+1}(\tau)\right)\left(x_{1,n-1}(\tau)-x_{1,n+1}(\tau)+2\right)\right]+\\
&+x_{2,n}^2(\tau)-x_{2,n-1}^2(\tau)\big]d\tau+\\
&+\tfrac{\beta}{2}\int_0^t\left[\left(x_{1,n-1}(\tau)-x_{1,n+1}(\tau)\right)\left(x_{1,n-1}(\tau)+x_{1,n+1}(\tau)+2\right)\right]+\\
&+\left(x_{2,n}^2(\tau)-x_{2,n-1}^2(\tau)\right)\left(x_{2,n}^2(\tau)+x_{2,n-1}^2(\tau)\right)\big]d\tau,\\
&x_{2,n}(t)=x_{2,n}(0)+\alpha\int_0^t\left[\left(x_{1,n-1}(\tau)-x_{1,n}(\tau)\right)\left(x_{1,n-1}(\tau)-x_{1,n}(\tau)+2\right)\right]d\tau+\\
&+\beta\int_0^t\left(x_{1,n}(\tau)+1\right)^2+\left(x_{2,n-1}(\tau)-x_{2,n}(\tau)\right)d\tau-\\
&-\beta\int_0^t\left(x_{1,n}(\tau)+1\right)^2+\left(x_{2,n}(\tau)-x_{2,n+1}(\tau)\right)d\tau.
\end{aligned}
$$

Как показано в [2], [3], задача (5),(6) имеет единственное решение, ограниченное равномерно по t на положительной полуоси: $|x_{1,n}(t)|<M$, $|x_{2,n}(t)|<M$, $n=0,1,....t\in[0,\infty]$. Тогда из последних уравнений следует, что

$$
\begin{aligned}
&|x_{1,n}(t)|<|x_{1,n}(0)|+|\alpha|\,M\int_0^t|x_{1,n}(\tau)|\,d\tau+\tfrac{|\alpha|}{2}\int_0^t\left[\left|x_{2,n}(\tau)\right|+\left|x_{2,n+1}(\tau)\right|\right]d\tau+\\
&+|\beta|\left(2M\left(M+2\right)+M^2\right)\int_0^t|x_{1,n}(\tau)|\,d\tau+\\
&+|\beta|\left(M+1\right)\int_0^t\left\{\left|x_{1,n-1}(\tau)\right|+\left|x_{1,n+1}(\tau)\right|\right\}d\tau+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+|\beta|\left(M+1\right)\int_0^t\left\{\left|x_{2,n-1}(\tau)\right|+\left|x_{2,n}(\tau)\right|\right\}d\tau,\\
&|x_{2,n}(t)|<|x_{2,n}(0)|+2\,|\alpha|\left(M+1\right)\int_0^t\left\{\left|x_{1,n-1}(\tau)\right|+\left|x_{1,n}(\tau)\right|\right\}d\tau+\\
&+|\beta|\left(M+1\right)^2\int_0^t\left\{\left|x_{2,n-1}(\tau)\right|+\left|x_{2,n}(\tau)\right|\right\}d\tau+\\
&+|\beta|\left(M+1\right)^2\int_0^t\left\{\left|x_{2,n}(\tau)\right|^2+\left|x_{2,n+1}(\tau)\right|^2\right\}d\tau.
\end{aligned}
$$

Умножая оба полученные равенства на $(1+n)$ и просуммируя по n, получим:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\,|x_{1,n}(t)|<\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\,|x_{1,n}(0)|+|\alpha|\,M\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\,|x_{1,n}(\tau)|\,d\tau+\\
&+\tfrac{|\alpha|}{2}\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\left[\left|x_{2,n}(\tau)\right|+\left|x_{2,n+1}(\tau)\right|\right]d\tau+\\
&+|\beta|\left(3M^2+4M\right)\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\,|x_{1,n}(\tau)|\,d\tau+\\
&+|\beta|\left(M+1\right)\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\left|x_{1,n-1}(\tau)\right|d\tau+\\
&+|\beta|\left(M+1\right)\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\left|x_{1,n+1}(\tau)\right|d\tau+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+|\beta|\left(M+1\right)\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\left|x_{2,n-1}(\tau)\right|d\tau+\quad|\beta|\left(M+1\right)\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\left|x_{2,n}(\tau)\right|d\tau\\
&\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\,|x_{2,n}(t)|<\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\,|x_{2,n}(0)|+\\
&+2\,|\alpha|\left(M+1\right)\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\left|x_{1,n-1}(\tau)\right|d\tau+\\
&+2\,|\alpha|\left(M+1\right)\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\left|x_{1,n}(\tau)\right|d\tau+|\beta|\left(M+1\right)^2\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\left|x_{2,n-1}(\tau)d\tau\right|+\\
&+2\,|\beta|\left(M+1\right)^2\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\left|x_{2,n}(\tau)\right|d\tau+|\beta|\left(M+1\right)^2\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\left|x_{2,n+1}(\tau)\right|d\tau.
\end{aligned}
$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{array}{l}\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\left|x_{j,n-1}(\tau)\right| = \sum_{n=0}^{\infty}(2+n)\left|x_{j,n}(\tau)\right| < 2\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\left|x_{j,n}(\tau)\right|,\\ \sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\left|x_{j,n+1}(\tau)\right| < \sum_{n=0}^{\infty}(1+n+1)\left|x_{j,n+1}(\tau)\right| < \sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\left|x_{j,n}(\tau)\right|,\ j=1,2,\end{array}$$

окончательно получим:

$$\begin{array}{l}\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\left|x_{1,n}(t)\right| < \sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\left|x_{1,n}(0)\right| + \{|\alpha|\,M + |\beta|\left(3M^2+4M\right) +\\ +3\,|\beta|\,(M+1)\}\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\left|x_{1,n}(\tau)\right|d\tau +\\ +\{|\alpha| + 3\,|\beta|\,(M+1)\}\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\left|x_{2,n}(\tau)\right|d\tau,\end{array}$$

$$\begin{array}{l}\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\left|x_{2,n}(t)\right| < \sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\left|x_{2,n}(0)\right| +\\ +4\,|\alpha|\,(M+1)\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\left|x_{1,n-1}(\tau)\right|d\tau +\\ +5\,|\beta|\,(M+1)^2\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\left|x_{2,n}(\tau)\right|d\tau.\end{array}$$

Полагая

$$\begin{array}{l}C = \max\{(|\alpha| + |\beta|\,(3M+4))\,M + (4\,|\alpha| + 3\,|\beta|)\,(M+1)\,;\\ |\alpha| + (4\,|\alpha| + 3\,|\beta|)\,(M+1) + 5\,|\beta|\,(M+1)^2\Big\}\end{array}$$

и складывая два последних неравенства, имеем

$$\|x(t)\|_E < \|x(0)\|_E + C\int_0^t \|x(\tau)\|_E\,d\tau.$$

Используя теперь лемму Гронуолля, получаем неравенство

$$\|x(t)\|_E < \|x(0)\|_E\,e^{CT},\ \ t\in(0,\ t^*\,),$$

которое противоречит нашему предположению. Следовательно, задача (4),(5) и, тем самым, задача (1),(2) однозначно разрешима в классе (3). Теорема доказана.

Список литературы

[1] Березанский Ю.М. Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи // Докл. АН СССР, 1985, т.281, є1, с.16-19.

[2] Teschl G. Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices // Math. surv.and monographs, AMS, CityplaceProvidence, 2000, v.72.

[3] Masmaliyev H.M., Khanmamedov A.Kh. A solution method for system of nonlinear differential equations // Transactions of NAS Azerbaijan,2012,vol.XXXII, є1, p.101-106.

Г.М.Масмалиев
Бакинский Государственный Университет
Кафедра "Прикладная математика"

Received 01 January 2013
Accepted 29 August 2013