

Об индексе дефекте системы одного многопараметрического матричного уравнения типа Штурма-Лиувилля

М.С. Алмамедов

Аннотация. Цель настоящей работы – установить, при каких условиях существует тензорное произведение отдельных нетривиальных решений системы уравнений (1), принадлежащих пространству $L^2(J_b, Q(x)dx)$ и дать оценку числа таких тензорных произведений.

Ключевые слова: Индекс дефекта, многопараметрическая система, тензорное произведение, матричный круг, предельная точка, предельный круг.

При фиксированном значении индекса $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ рассмотрим многопараметрическое дифференциальное уравнение

$$-y_j''(x_j) + p_j(x_j)y_j(x_j) + \sum_{k=1}^n \lambda_k Q_{jk}(x_j)y_j(x_j) = 0 \quad (1)$$

где $0 \leq x_j < \infty, \lambda_k = (\rho_1)_k + (\rho_2)_k$ и $y_j(x_j)$ вектор функция с r_j компонентами. $P_j(x_j)$ и $Q_{jk}(x_j)$ квадратные матрицы r_j -го порядка и при этом

$$P_j(x_j) = R_j(x_j) + iT_j(x_j), R_j = R_j^*, T_j = T_j^*,$$

$$Q_{jk}(x_j) = A_{jk}(x_j) + iB_{jk}(x_j), A_{jk} = A_{jk}^*, B_{jk} = B_{jk}^*,$$

непрерывные матрицы – функции на полуоси $[0, \infty)$.

Мы хотим ввести аналоги окружностей и кругов Г.Вейля для уравнения (1) с многопараметрами. Классическая теория Г.Вейля о предельной точке и предельной окружности для операторов Штурма-Лиувилля с вещественными потенциалами (см. [1], [2]) распространяется также на случай комплексных потенциалов, как это было замечено В.Б.Лидским и Г.А.Исаевым (см. [3], [4]) в ходе построения теории несамосопряженных операторов Штурма-Лиувилля с дискретным спектром.

Через $y_1 \otimes y_2 \otimes \dots \otimes y_n$ обозначим тензорное произведение векторов $y_1(x_1, \lambda), y_2(x_2, \lambda), \dots, y_n(x_n, \lambda)$ из $c^{r_1}, c^{r_2}, \dots, c^{r_n}$ соответственно, оно является $(r_1 \times r_2 \times \dots \times r_n)$ – компонентным вектором зависящим от переменных x_1, x_2, \dots, x_n .

Тензорное произведение нетривиальных решений систем уравнений (1) принадлежащих к пространству $L^2(J_b, Q(x)dx)$, т.е. удовлетворяющих условию

$$\int_{J_b} Q(x) |y_1(x_1, \lambda) \otimes y_2(x_2, \lambda) \otimes \cdots \otimes y_n(x_n, \lambda)|^2 dx < \infty$$

являются собственной функцией задачи (1).

Число таких линейно-независимых тензорных произведений называется индексом дефекта многопараметрической системы (1).

Здесь $J_b = [0, \infty) \times \cdots \times [0, \infty)$ и

$$Q(x) = A(x) + B(x); A(x) = \det \{ \|(\rho_2)_k A_{jk}^t(x_j)\| \}_{j,k=1}^n > 0,$$

$$B(x) = \det \{ \|(\rho_1)_k B_{jk}^t(x_j)\| \}_{j,k=1}^n > 0$$

где A_{jk}^t и B_{jk}^t тензорно индуцированный оператор в $C^{r_1 \times \cdots \times r_n}$ соответствующий матрице $A_{jk}(x_j)$ и $B_{jk}(x_j)$, т.е.

$$A_{jk}^t = I_1 \otimes \cdots \otimes I_{j-1} \otimes A_{jk} \otimes I_{j+1} \otimes \cdots \otimes I_n \text{ и}$$

$$B_{jk}^t = I_1 \otimes \cdots \otimes I_{j-1} \otimes B_{jk} \otimes I_{j+1} \otimes \cdots \otimes I_n.$$

В дальнейшем будем считать, что

$$\inf \det \|y_j^*(x_j) ((\rho_2)_k A_{jk}(x_j) + (\rho_1)_k B_{jk}(x_j)) y_j(x_j)\|_{j,k=1}^n > 0.$$

Цель настоящей работы-установить, при каких условиях существует тензорное произведение отдельных нетривиальных решений системы уравнений (1), принадлежащих пространству $L^2(J_b, Q(x)dx)$ и дать оценку числу таких тензорных произведений.

Посредством матричных неравенств определим следующие подмножества C^n

$$\Lambda_j^+ = \left\{ \lambda \in C^n; T_j(x_j) + \sum_{k=1}^n [(\rho_2)_k A_{jk}(x_j) + (\rho_1)_k B_{jk}(x_j)] > 0 \right\}, x \in [0, \infty),$$

$$\Lambda_j^- = \left\{ \lambda \in C^n; T_j(x_j) + \sum_{k=1}^n [(\rho_2)_k A_{jk}(x_j) + (\rho_1)_k B_{jk}(x_j)] < 0 \right\}, x \in [0, \infty).$$

Отметим, что $\Lambda = \bigcap_{j=1}^n (\Lambda_j^+ \cup \Lambda_j^-)$ есть открытое множество. Эти подмножества из C^n будут играть роль верхней и нижней полуплоскостей однопараметрического случая.

Существуют матриц-функции, $G_j(x_j, \lambda)$ и $\theta_j(x_j, \lambda)$ решений уравнения системы (1) удовлетворяющей следующим начальным условиям в фиксированном точке $c_j \in (a_j, b_j)$:

$$G_j(c_j, \lambda) = E_{r_j}, \quad G_j'(c_j, \lambda) = 0,$$

$$\theta_j(c_j, \lambda) = 0, \quad \theta'_j(c_j, \lambda) = E_{r_j}, \quad \lambda \in \Lambda \quad (2)$$

и для матричной функции

$$\Psi_j(x_j, \lambda, l_j) = \theta_j(x_j, \lambda) + G_j(x_j, \lambda) l_j \quad (3)$$

справедливо равенство

$$\int_{c_j}^{x_j} \Psi_j^*(\xi_j, \lambda, l_j) S_j(\xi_j, \lambda) \Psi_j(\xi_j, \lambda, l_j) d\xi_j = Jml + F(x_j, \lambda, l_j) \quad (4)$$

где $S_j(\xi_j, \lambda) = T_j(\xi_j) + \sum_{k=1}^n [(\rho_2)_k A_{jk}(\xi_j) + (\rho_1)_k B_{jk}(\xi_j)]$.

Здесь l и l_j постоянная квадратная матрица порядка r_j и

$$F(x_j, \lambda, l_j) = M_0 + Ml_j + l_j^* M_1 + l_j^* M_2 l_j.$$

Теперь найдем явный вид l , M_0 , M , M_1 и M_2 .

Пусть $y_j(x_j, \lambda)$ есть произвольное матричное решение уравнения (1). Тогда имеем

$$-y_j^*(x_j, \lambda) y_j''(x_j, \lambda) + y_j^*(x_j, \lambda) \left[p_j(x_j) + \sum_{k=1}^n \lambda_k Q_{jk}(x_j) \right] y_j(x_j, \lambda) = 0.$$

Отсюда

$$\int_{c_j}^{x_j} y_j^*(\xi_j, \lambda) y_j''(\xi_j, \lambda) d\xi_j = \int_{c_j}^{x_j} y_j^*(\xi_j, \lambda) \left[p_j(\xi_j) + \sum_{k=1}^n \lambda_k Q_{jk}(\xi_j) \right] y_j(\xi_j, \lambda) d\xi_j,$$

или

$$\begin{aligned} y_j^*(\xi_j, \lambda) y_j'(\xi_j, \lambda) \Big|_{c_j}^{x_j} - \left| (y_j^*(\xi_j, \lambda))' (y_j(\xi_j, \lambda)) \right|_{c_j}^{x_j} + \int_{c_j}^{x_j} y_j(\xi_j, \lambda) [y_j^*(\xi_j, \lambda)]'' d\xi_j = \\ = \int_{c_j}^{x_j} y_j^*(\xi_j, \lambda) \left[p_j(\xi_j) + \sum_{k=1}^n \lambda_k Q_{jk}(\xi_j) \right] y_j(\xi_j, \lambda) d\xi_j. \end{aligned}$$

Выделяя мнимую часть, получим

$$\begin{aligned} \int_{c_j}^{x_j} y_j^*(\xi_j, \lambda) S_j(\xi_j, \lambda) y_j(\xi_j, \lambda) d\xi_j = \\ = \frac{1}{2i} Jm \left[y_j^*(x_j, \lambda) y_j'(x_j, \lambda) - (y_j^*(c_j, \lambda))' y_j(c_j, \lambda) \right] = \frac{1}{2i} W [y_j^*, y_j] \Big|_{c_j}^{x_j}. \end{aligned}$$

Другими словами, имеет место соотношение

$$2i \int_{c_j}^{x_j} y_j^* S_j y_j d\xi_j = W [y_j^*, y_j] \Big|_{c_j}^{x_j} \quad (5)$$

Напишем соотношение (5) для матричной функции $\Psi_j(x_j, \lambda, l_j) = \theta_j(x_j, \lambda) + G_j(x_j, \lambda)l_j$ получаем:

$$\begin{aligned} 2i \int_{c_j}^{x_j} \Psi_j^*(\xi_j, \lambda, l_j) S_j(\xi_j, \lambda) \Psi_j(\xi_j, \lambda, l_j) d\xi_j = \\ = W[\Psi_j^*, \Psi_j](x_j) - W[\Psi_j^*, \Psi_j](c_j). \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая условие (2) в (6) получим:

$$\begin{aligned} W[\Psi_j^*, \Psi_j](c_j) &= \Psi_j^*(c_j, \lambda, l_j) \Psi_j'(c_j, \lambda, l_j) - (\Psi_j^*(c_j, \lambda, l_j))' \Psi_j'(c_j, \lambda, l_j) = \\ &= [\theta_j^*(c_j, \lambda) + G_j^*(c_j, \lambda) \cdot l_j^*] \cdot [\theta_j'(c_j, \lambda) + G_j'(c_j, \lambda) l_j] - ([\theta_j^*(c_j, \lambda)]' + \\ &+ (G_j^*(c_j, \lambda))' l_j) (\theta(c_j, \lambda) + G_j(c_j, \lambda) l_j) = E_{r_j} l_j^* E_{r_j} - E_{r_j} E_{r_j} l_j = l_j^* - l_j. \end{aligned}$$

Следовательно $l = l_j^* - l_j$, и

$$\begin{aligned} W[\Psi_j^* \Psi_j](x_j) &= (\Psi_j^* \Psi_j' - (\Psi_j^*)' \cdot \Psi_j)(x_j) = [\theta_j^* + l_j^* \cdot G_j^*] \cdot \\ &[\theta_j' + G_j' l_j](x_j) - [(\theta_j^*)' + l_j^* (G_j^*)'] \cdot [\theta_j + G_j l_j](x_j) = \\ &= [\theta_j^* \cdot \theta_j' - (\theta_j^*)' \cdot \theta_j](x_j) + [\theta_j^* \cdot G_j' - (\theta_j^*)' \cdot G_j](x_j) \cdot l_j + \\ &+ l_j^* [\theta_j' G_j - (G_j^*)' \cdot \theta_j](x_j) + l_j^* [G_j^* G_j' - (G_j^*)' \cdot G_j](x_j) \cdot l_j = \\ &= M_0 + M l_j + l_j^* M_1 + l_j^* M_2 l_j = F(x_j, \lambda, l_j), \end{aligned}$$

где M_0, M, M_1, M_2 соответственно равны

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{1}{2i} \begin{vmatrix} \theta_j^* & (\theta_j^*)' \\ \theta_j & \theta_j' \end{vmatrix}, M = \frac{1}{2i} \begin{vmatrix} \theta_j^* & (\theta_j^*)' \\ G_j & G_j' \end{vmatrix}, \\ M_1 &= \frac{1}{2i} \begin{vmatrix} G_j^* & (G_j^*)' \\ \theta_j & \theta_j' \end{vmatrix}, M_2 = \frac{1}{2i} \begin{vmatrix} G_j^* & (G_j^*)' \\ G_j & G_j' \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Через $L_{x_j, \lambda}$ обозначим множество квадратных матриц l_j порядка $r_j \times r_j$ таких, что

$$F(x_j, \lambda, l_j) \leq 0 \quad (7)$$

Множество $L_{x_j, \lambda}$ назовем матричным кругом для системы уравнений (1) с центром в точке

$$O_{b_j}(\lambda) = W[\theta_j, G_j] \Big|_{x_j=b_j} \left(2i \int_{c_j}^{b_j} G_j^*(x_j, \lambda) S_j(x_j, \lambda) G_j(x_j, \lambda) dx_j \right)^{-1} \quad (8)$$

и с радиусом, равным

$$R_{b_j}(\lambda) = \frac{1}{2} \left(\left| \int_{c_j}^{b_j} G_j^*(x_j, \lambda) S_j(x_j, \lambda) G_j(x_j, \lambda) dx_j \right| \right)^{-1}. \quad (9)$$

Таким образом, матрица l_j принадлежит множеству $L_{x_j, \lambda}$ тогда и только тогда, когда l_j лежит на матричной окружности $c_{b_j}(\lambda)$:

$$\int_{c_j}^{x_j} \Psi_j^*(\xi_j, \lambda, l_j) S_j(\xi_j, \lambda) \Psi_j(\xi_j, \lambda, l_j) d\xi_j \leq Jml. \quad (10)$$

Пусть $\lambda \in \Lambda_j^+$. Тогда $S_j(\xi_j, \lambda) > 0$ и если $l_j \in L_{x_j, \lambda}$, то $l_j \in L_{x'_j, \lambda}$, при $x'_j < x_j$, т.е. $L_{x_j, \lambda} < L_{x'_j, \lambda}$.

Другими словами, семейство $L_{x_j, \lambda}$ монотонно убывает.

Действительно, имеем $F(x_j, \lambda, l_j) \leq 0$ а также

$$\begin{aligned} F(x'_j, \lambda, l_j) &\leq \int_{c_j}^{x'_j} \Psi_j^*(\xi_j, \lambda, l_j) S_j(\xi_j, \lambda) \Psi_j(\xi_j, \lambda, l_j) d\xi_j - Jml < \\ &< \int_{c_j}^{x_j} \Psi_j^*(\xi_j, \lambda, l_j) S_j(\xi_j, \lambda) \Psi_j(\xi_j, \lambda, l_j) d\xi_j - Jml = F(x_j, \lambda, l_j). \end{aligned}$$

Введем обозначение $\bigcap_{b_j > x_j > c_j} L_{x_j, \lambda} = L$.

Тогда если $l_j \in L$, то

$$\int_{c_j}^{x_j} \Psi_j^*(\xi_j, \lambda, l_j) S_j(\xi_j, \lambda) \Psi_j(\xi_j, \lambda, l_j) d\xi_j \leq Jml \quad (11)$$

и наоборот, если выполнено (11), то $l_j \in L$ (предельный матричный круг).

Тогда $\lambda \in \Lambda_j^-$ семейство матриц l_j удовлетворяющих условию $F(x_j, \lambda, l_j) \geq 0$, представляет собой матричный круг:

$$\begin{aligned} (-M_0) + (-M)l_j + l_j^*(-M_1) + l_j^*(-M_2)l_j &\leq 0, \\ -M_2 < 0, \quad -M_0 < 0. \end{aligned}$$

Итак, пусть $\lambda \in \Lambda_j^-$. Тогда $S_j(\xi_j, \lambda) < 0$ и

$$\int_{c_j}^{x_j} \Psi_j^*(\xi_j, \lambda, l_j) S_j(\xi_j, \lambda) \Psi_j(\xi_j, \lambda, l_j) d\xi_j = Jml + F(x_j, \lambda, l_j). \quad (12)$$

Через $\tilde{L}_{x_j, \lambda}$ обозначим матричный круг

$$F(x_j, \lambda, l_j) \geq 0. \quad (13)$$

Теперь докажем что, операторы M_0 и M_2 являются строго положительными, т.е. при $x \neq 0$, то $(M_0x, x) > 0$ и $(M_2x, x) > 0$.

Для этого сначала рассмотрим

$$\begin{aligned}
-Z_j^* J Z_j &= \begin{vmatrix} G^* & (G')^* \\ \theta^* & (\theta')^* \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & iE \\ -iE & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} G & \theta \\ G' & \theta' \end{vmatrix} = \\
&= - \begin{vmatrix} i[G^*G' - (G')^*G] & i[G^*\theta' - (G')^*\theta] \\ i[\theta^*G' - (\theta')^*G] & i[\theta^*\theta' - (\theta')^*\theta] \end{vmatrix} = \\
&= 2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{G^*G' - (G')^*G}{2i} & \frac{G^*\theta' - (G')^*\theta}{2i} \\ \frac{\theta^*G' - (\theta')^*G}{2i} & \frac{\theta^*\theta' - (\theta')^*\theta}{2i} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} M_2 & M_1 \\ M & M_0 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Здесь при $\lambda \in \Lambda_j^+$ имеем $J + Z_j^* J Z_j > 0$ или

$$\left\langle J \begin{vmatrix} x \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x \\ 0 \end{vmatrix} \right\rangle + 2 \left\langle \begin{vmatrix} M_2 & M_1 \\ M & M_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x \\ 0 \end{vmatrix} \right\rangle > 0.$$

Далее

$$\begin{aligned}
&\left\langle J \begin{vmatrix} 0 \\ ix \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x \\ 0 \end{vmatrix} \right\rangle + 2 \left\langle \begin{vmatrix} M_2x \\ Mx \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x \\ 0 \end{vmatrix} \right\rangle = 2(M_2x, x) > 0 \\
\left\langle J \begin{vmatrix} 0 \\ y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ y \end{vmatrix} \right\rangle + 2 \left\langle \begin{vmatrix} M_2 & M_1 \\ M & M_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ y \end{vmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{vmatrix} iy \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ y \end{vmatrix} \right\rangle = \\
&= \left\langle \begin{vmatrix} iy \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ y \end{vmatrix} \right\rangle + 2 \left\langle \begin{vmatrix} My \\ M_0y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ y \end{vmatrix} \right\rangle = 2(M_0y, y) > 0.
\end{aligned}$$

Последовательно, можно доказать что операторы M и M_1 тоже строго положительны, т.е. $(Mx, x) > 0$, $(M_1x, x) > 0$.

При $\lambda \in \Lambda_j^-$ имеем

$$J - Z_j^* J Z_j < 0, \quad (M_2x, x) < 0, \quad (M_0x, x) < 0.$$

Далее $l_j \in \tilde{L}_{x_j, \lambda}$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{c_j}^{x_j} \Psi_j^*(\xi_j, \lambda, l_j) S_j(\xi_j, \lambda) \Psi_j(\xi_j, \lambda, l_j) d\xi_j \geq Jml. \quad (14)$$

Пусть $l_j \in \tilde{L}_{x_j, \lambda}$ и $x'_j < x_j$. Тогда $F(x_j, \lambda, l_j) \geq 0$ и

$$\begin{aligned}
F(x'_j, \lambda, l_j) &\leq \int_{c_j}^{x'_j} \Psi_j^*(\xi_j, \lambda, l_j) S_j(\xi_j, \lambda) \Psi_j(\xi_j, \lambda, l_j) d\xi_j - Jml \geq \\
&\geq \int_{c_j}^{x_j} \Psi_j^*(\xi_j, \lambda, l_j) S_j(\xi_j, \lambda) \Psi_j(\xi_j, \lambda, l_j) d\xi_j - Jml = F(x_j, \lambda, l_j).
\end{aligned}$$

Таким образом, при $\lambda \in \Lambda_j^-$ матричные круги (13) монотонно убывают (вложены друг в друге) с возрастанием $x_j \rightarrow b_j$.

Обозначение $\bigcap_{b_j > x_j > c_j} \tilde{L}_{x_j, \lambda} = \tilde{L}$. Тогда если $l \in \tilde{L}$ то

$$\int_{c_j}^{x_j} \Psi_j^*(\xi_j, \lambda, l_j) S_j(\xi_j, \lambda) \Psi_j(\xi_j, \lambda, l_j) d\xi_j \geq Jml \quad (15)$$

и наоборот, если выполнено (15), то $l_j \in \tilde{L}$ (предельный матричный круг для $\lambda \in \Lambda_j^-$).

Таким образом, если $\lambda \in \Lambda_j^+ \cup \Lambda_j^-$, то имеем

$$\int_{c_j}^{x_j} \Psi_j^*(\xi_j, \lambda, l_j) |S_j(\xi_j, \lambda)| \Psi_j(\xi_j, \lambda, l_j) d\xi_j \geq |Jml|. \quad (16)$$

Пусть теперь

$$l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad l_{r_j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

ортвекторы. Напишем соотношение (16) для $\lambda \in \Lambda_j^+$ и на векторах l_1, l_2, \dots, l_{r_j}

$$\begin{aligned} \int_{c_j}^{x_j} (\Psi_j^*(\xi_j, \lambda, l_j) S_j(\xi_j, \lambda) \Psi_j(\xi_j, \lambda, l_j) l_j, l_j) d\xi_j &\leq \\ &\leq ((Jml) l_j, l_j), \quad j = 1, 2, \dots, r_j \end{aligned}$$

или

$$\int_{c_j}^{x_j} (S_j(\xi_j, \lambda) \Psi_j(\xi_j, \lambda, l_j) l_j, \Psi_j(\xi_j, \lambda, l_j) l_j) d\xi_j < +\infty.$$

Пусть

$$\Psi_j(\xi_j, \lambda, l_j) = \begin{pmatrix} (\Psi_j)_{11} \cdots (\Psi_j)_{1r_j} \\ (\Psi_j)_{r_j 1} \cdots (\Psi_j)_{r_j r_j} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Тогда из (17) и (18) получаем

$$\Psi_j l_1 = \begin{pmatrix} (\Psi_j)_{11} \\ \vdots \\ (\Psi_j)_{r_j 1} \end{pmatrix} = K_j^1(\xi_j, \lambda), \quad \Psi_j l_2 = \begin{pmatrix} (\Psi_j)_{12} \\ \vdots \\ (\Psi_j)_{r_j 2} \end{pmatrix} = K_j^2(\xi_j, \lambda) \dots,$$

$$\Psi_j l_{r_j} = \begin{pmatrix} (\Psi_j)_{1r_j} \\ \vdots \\ (\Psi_j)_{r_j r_j} \end{pmatrix} = K_j^{r_j}(\xi_j, \lambda).$$

Таким образом

$$\int_{c_j}^{x_j} (S_j(\xi_j, \lambda) K_j^m(\xi_j, \lambda_j), K_j^m(\xi_j, \lambda)) d\xi_j < +\infty, \quad m = 1, 2, \dots, r_j \quad (19)$$

и в общем случае для $\lambda \in \Lambda_j^+ \cup \Lambda_j^-$ имеем функции $K_j^m(\xi_j, \lambda)$ $m = 1, 2, \dots, r_j$ обладающие свойством

$$\int_{c_j}^{x_j} (|S_j(\xi_j, \lambda)| K_j^m(\xi_j, \lambda_j), K_j^m(\xi_j, \lambda)) d\xi_j < +\infty. \quad (20)$$

Здесь вектор-функции $K_j^1(\xi_j, \lambda), K_j^2(\xi_j, \lambda), \dots, K_j^{r_j}(\xi_j, \lambda)$ линейно независимы. Так как эти векторы совпадают с соответствующими столбцами матрицы $\Psi_j(\xi_j, \lambda, l_j)$ и из условия (2) получаем

$$\det \Psi_j(c_j, \lambda, l_j) = \det(\theta_j(c_j, \lambda) + G_j(c_j, \lambda) l_j) = \det(E_{r_j} l_j) = \det l_j,$$

$$\det \Psi_j^1(c_j, \lambda) = \det(\theta_j'(c_j, \lambda) + G_j'(c_j, \lambda) l_j) = \det E_{r_j} = 1.$$

Теперь исследуем всевозможные случаи принадлежности и непринадлежности тензорных произведений

$y_1(x_1, \lambda) \otimes y_2(x_2, \lambda) \otimes \dots \otimes y_n(x_n, \lambda)$ (с $r_1 \times r_2 \times \dots \times r_n$ компонентом) пространству с весом $L^2(J_b, Q(x)dx)$, где

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in J_b = [c_1, b_1) \times \dots \times [c_n, b_n).$$

Число тензорных произведений $y_1(x_1, \lambda) \otimes \dots \otimes y_n(x_n, \lambda)$ принадлежащих $L^2(J_b, Q(x)dx)$ назовем индексом дефекта многопараметрической задачи (1) в сингулярном конце в (соответствующей точке λ).

Здесь

$$Q(x) = \det \begin{vmatrix} (\rho_2)_1 A_{11}^t + (\rho_1)_1 B_{11}^t & (\rho_2)_2 A_{12}^t + (\rho_1)_2 B_{12}^t & \dots & (\rho_2)_n A_{1n}^t + (\rho_1)_n B_{1n}^t \\ (\rho_2)_1 A_{21}^t + (\rho_1)_1 B_{21}^t & (\rho_2)_2 A_{22}^t + (\rho_1)_2 B_{22}^t & \dots & (\rho_2)_n A_{2n}^t + (\rho_1)_n B_{2n}^t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\rho_2)_1 A_{n1}^t + (\rho_1)_1 B_{n1}^t & (\rho_2)_2 A_{n2}^t + (\rho_1)_2 B_{n2}^t & \dots & (\rho_2)_n A_{nn}^t + (\rho_1)_n B_{nn}^t \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{k=1}^n (\rho_2)_k \cdot \det \begin{vmatrix} A_{11}^t A_{12}^t \dots A_{1n}^t \\ A_{21}^t A_{22}^t \dots A_{2n}^t \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}^t A_{n2}^t \dots A_{nn}^t \end{vmatrix} + \prod_{k=1}^n (\rho_1)_k \cdot \det \begin{vmatrix} B_{11}^t B_{12}^t \dots B_{1n}^t \\ B_{21}^t B_{22}^t \dots B_{2n}^t \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{n1}^t B_{n2}^t \dots B_{nn}^t \end{vmatrix}$$

является квадратной матрица-функцией размера $r_1 \times r_2 \times \dots \times r_n$. Очевидно, что

$$Q(x) y_1 \otimes \dots \otimes y_n = \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} Q_{1,\sigma(1)}^t \dots Q_{n,\sigma(n)}^t y_1 \otimes \dots \otimes y_n =$$

$$= \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \left(Q_{1,\sigma(1)}^t y_1 \right) \otimes \left(Q_{2,\sigma(2)}^t y_2 \right) \otimes \dots \otimes \left(Q_{n,\sigma(n)}^t y_n \right) =$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \left(A_{1,\sigma(1)}^t y_1 \right) \otimes \left(A_{2,\sigma(2)}^t y_2 \right) \otimes \cdots \otimes \left(A_{n,\sigma(n)}^t y_n \right) + \\
& + \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \left(B_{1,\sigma(1)}^t y_1 \right) \otimes \left(B_{2,\sigma(2)}^t y_2 \right) \otimes \cdots \otimes \left(B_{n,\sigma(n)}^t y_n \right).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
& (Q(x)y_1 \otimes \cdots \otimes y_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) = \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \left(Q_{1,\sigma(1)}^t y_1, y_1 \right) \cdots \left(Q_{n,\sigma(n)}^t y_n, y_n \right) = \\
& = \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \left(A_{1,\sigma(1)}^t y_1, y_1 \right) \cdots \left(A_{n,\sigma(n)}^t y_n, y_n \right) + \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \left(B_{1,\sigma(1)}^t y_1, y_1 \right) \cdots \left(B_{n,\sigma(n)}^t y_n, y_n \right) = \\
& = \det \{ (A_{jk} y_j, y_j) \}_{j,k=1}^n + \det \{ (B_{jk} y_j, y_j) \}_{j,k=1}^n = \\
& = \det \{ (y_j^* A_{jk} y_j) \}_{j,k=1}^n + \det \{ (y_j^* B_{jk} y_j) \}_{j,k=1}^n.
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает, также что операторы $\left(A_{jk}^t \right)_{j,k=1}^{r_j}$ и $\left(B_{jk}^t \right)_{j,k=1}^{r_j}$ действующие в $\mathcal{C}^{r_1, \dots, r_n}$ являются строго положительными.

Пусть $\lambda \in \Lambda$ и $\lambda \in R^n$. Тогда хотя бы для одной координаты λ_t точки λ имеем $(\rho_2)_t \neq 0, (\rho_1)_t \neq 0$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
& (A(x_j)(y_1(x_1, \lambda) \otimes \cdots \otimes y_n(x_n, \lambda)), (y_1(x_1, \lambda) \otimes \cdots \otimes y_n(x_n, \lambda))) + \\
& (B(x_j)(y_1(x_1, \lambda) \otimes \cdots \otimes y_n(x_n, \lambda)), (y_1(x_1, \lambda) \otimes \cdots \otimes y_n(x_n, \lambda))) = \\
& = \det \{ A_{jk}(x_j) y_j(x_j, \lambda), y_j(x_j, \lambda) \}_{j,k=1}^n + \det \{ B_{jk}(x_j) y_j(x_j, \lambda), y_j(x_j, \lambda) \}_{j,k=1}^n = \\
& = \det \left\| \begin{array}{cccc} (A_{11} y_1, y_1) \cdots (A_{1t} y_1, y_1) \cdots (A_{1n} y_1, y_1) \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ (A_{n1} y_n, y_n) \cdots (A_{nt} y_n, y_n) \cdots (A_{nn} y_n, y_n) \end{array} \right\| + \\
& + \det \left\| \begin{array}{cccc} (B_{11} y_1, y_1) \cdots (B_{1t} y_1, y_1) \cdots (B_{1n} y_1, y_1) \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ (B_{n1} y_n, y_n) \cdots (B_{nt} y_n, y_n) \cdots (B_{nn} y_n, y_n) \end{array} \right\| = \\
& = (A_{1t}(x_1) y_1(x_1), y_1(x_1)) A^{(1,t)}(x_2, \dots, x_n) + (A_{2t}(x_2) y_2(x_2), y_2(x_2)) \cdot \\
& \cdot A^{(2,t)}(x_1, x_3, \dots, x_n) + \cdots + (A_{nt}(x_n) y_n(x_n), y_n(x_n)) A^{(n,t)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + \\
& + (B_{1t}(x_1) y_1(x_1), y_1(x_1)) B^{(1,t)}(x_2, x_3, \dots, x_n) + (B_{2t}(x_2) y_2(x_2), y_2(x_2)) \cdot \\
& \cdot B^{(2,t)}(x_1, x_3, \dots, x_n) + \cdots + (B_{nt}(x_n) y_n(x_n), y_n(x_n)) B^{(n,t)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})
\end{aligned}$$

Далее, нетрудно видеть, что

$$S_j(x_j, \lambda) = T_j(x_j) + \sum_{k=1}^n ((\rho_2)_k A_{jk}(x_j) + (\rho_1)_k B_{jk}(x_j)),$$

$$A_{jt} = \frac{1}{(\rho_2)_k} S_j(x_j, \lambda) - \frac{1}{(\rho_2)_t} T_j(x_j) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq t}}^n \frac{(\rho_2)_k}{(\rho_2)_t} A_{jk}(x_j), \quad j = \overline{1, n}, \quad (21)$$

$$B_{jt} = \frac{1}{(\rho_1)_k} S_j(x_j, \lambda) - \frac{1}{(\rho_1)_t} T_j(x_j) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq t}}^n \frac{(\rho_1)_k}{(\rho_1)_t} B_{jk}(x_j), \quad j = \overline{1, n} \quad (22)$$

Из (??), (21) и (22) получаем:

$$\begin{aligned} (A(x)y_1 \otimes \cdots \otimes y_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) &= \sum_{q=1}^n (A_{qt}(x_q) y_q(x_q, \lambda), y_q(x_q, \lambda)) \times \\ &\times (A^{(q,t)}(x_1, \dots, \hat{x}_q, \dots, x_n)) = \frac{1}{(\rho_2)_t} \sum_{q=1}^n (S_q(x_q, \lambda) y_q(x_q, \lambda), y_q(x_q, \lambda)) \times \\ &\times (A^{(q,t)}(x_1, \dots, \hat{x}_q, \dots, x_n)) = \frac{1}{(\rho_2)_t} \sum_{q=1}^n (T_q(x_q) y_q, y_q) (A^{(q,t)}(x_1, \dots, \hat{x}_q, \dots, x_n)) - \\ &- \sum_{q=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq t}}^n \frac{(\rho_2)_k}{(\rho_2)_t} (A_{qk}(x_q) y_q, y_q) (A^{(q,t)}(x_1, \dots, \hat{x}_q, \dots, x_n)), \end{aligned} \quad (23)$$

и

$$\begin{aligned} (B(x)y_1 \otimes \cdots \otimes y_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) &= \sum_{q=1}^n (B_{qt}(x_q) y_q(x_q, \lambda), y_q(x_q, \lambda)) \times \\ &\times (B^{(q,t)}(x_1, \dots, \hat{x}_q, \dots, x_n)) = \frac{1}{(\rho_1)_t} \sum_{q=1}^n (S_q(x_q, \lambda) y_q(x_q, \lambda), y_q(x_q, \lambda)) \times \\ &\times (B^{(q,t)}(x_1, \dots, \hat{x}_q, \dots, x_n)) - \frac{1}{(\rho_1)_t} \sum_{q=1}^n (T_q(x_q) y_q, y_q) \times \\ &\times (B^{(q,t)}(x_1, \dots, \hat{x}_q, \dots, x_n)) - \sum_{q=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq t}}^n \frac{(\rho_1)_k}{(\rho_1)_t} (B_{qk}(x_q) y_q, y_q) (B^{(q,t)}(x_1, \dots, \hat{x}_q, \dots, x_n)). \end{aligned} \quad (24)$$

где знак "Λ" над переменной означает пропускание этой переменной.

Далее, имеем

$$(A(x)y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) = \det \{(A_{jk}y_j, y_j)\}_{j,k=1}^n = \frac{1}{(\rho_2)_t} \times$$

$$\begin{aligned}
& \cdots dx_q \cdots dx_n - \frac{1}{(\rho_2)_t} \sum_{q=1}^n \int_{[c_q, b'_q]} (T_q y_q, y_q) dx_q \cdot \int \cdots \int A^{(q,t)} dx_1 \cdots dx_q \cdots dx_n, \\
& \int_{[c, b']} (B y_1 \otimes \cdots \otimes y_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) dx = \frac{1}{(\rho_1)_t} \sum_{q=1}^n \int_{[c_q, b'_q]} (S_q y_q, y_q) dx_q \cdot \int \cdots \int B^{(q,t)} dx_1 \cdots \\
& \cdots dx_q \cdots dx_n - \frac{1}{(\rho_1)_t} \sum_{q=1}^n \int_{[c_q, b'_q]} (T_q y_q, y_q) dx_q \cdot \int \cdots \int B^{(q,t)} dx_1 \cdots dx_q \cdots dx_n.
\end{aligned}$$

С учетом вида алгебраических дополнений $A^{(q,t)}(x_1, \dots, \hat{x}_q \cdots x_n)$ и $B^{(q,t)}(x_1, \dots, \hat{x}_q \cdots x_n)$ предыдущей формулы получим:

$$\begin{aligned}
& \int_{[c, b']} \det \{(A_{jk} y_j, y_j)\}_{j,k=1}^n dx = \frac{1}{(\rho_2)_t} \sum_{q=1}^n \left\{ \int_{c_q}^{b'_q} (S_q y_q, y_q) dx_q \cdot \right. \\
& \cdot (-1)^{q+t} \sum_{\hat{\sigma}} \int_{c_q}^{b'_q} (A_{1,\sigma(1)} y_1, y_1) dx_1 \cdots \int_{c_q}^{b'_q} dx_q \cdots \int_{c_n}^{b'_n} (A_{n,\sigma(n)} y_n, y_n) dx_n - \\
& \left. - \frac{1}{(\rho_2)_t} \sum_{q=1}^n \int_{c_q}^{b'_q} (T_q y_q, y_q) dx_q (-1)^{q+t} \sum_{\hat{\sigma}} \int_{c_1}^{b'_1} (A_{1,\sigma(1)} y_1, y_1) dx_1 \cdots \int_{c_n}^{b'_n} (A_n y_n, y_n) dx_n \right. \\
& \left. \right\} \quad (25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{[c, b']} \det \{(B_{jk} y_j, y_j)\}_{j,k=1}^n dx = \frac{1}{(\rho_1)_t} \sum_{q=1}^n \left\{ \int_{c_q}^{b'_q} (S_q y_q, y_q) dx_q \cdot \right. \\
& \cdot (-1)^{q+t} \sum_{\hat{\sigma}} \int_{c_1}^{b'_1} (B_{1,\sigma(1)} y_1, y_1) dx_1 \cdots \int_{c_q}^{b'_q} dx_q \cdots \int_{c_n}^{b'_n} (B_{n,\sigma(n)} y_n, y_n) dx_n - \\
& \left. - \frac{1}{(\rho_1)_t} \sum_{q=1}^n \int_{c_q}^{b'_q} (T_q y_q, y_q) dx_q (-1)^{q+t} \sum_{\hat{\sigma}} \int_{c_1}^{b'_1} (B_{1,\sigma(1)} y_1, y_1) dx_1 \cdots \int_{c_n}^{b'_n} (B_n y_n, y_n) dx_n \right. \\
& \left. \right\} \quad (26)
\end{aligned}$$

Из (25) при $q = 1$ получаем:

$$\begin{aligned}
& \int_{[c, b']} \det \{(A_{jk} y_j, y_j)\}_{j,k=1}^n dx = \frac{1}{(\rho_2)_t} \int_{c_1}^{b'_1} (S_1 y_1, y_1) dx_1 \cdot \\
& \cdot (-1)^{1+t} \sum_{\hat{\sigma}} \int_{c_2}^{b'_2} (A_{2,\sigma(2)} y_2, y_2) dx_2 \cdots \int_{c_n}^{b'_n} (A_{n,\sigma(n)} y_n, y_n) dx_n - \cdots, \quad (t \notin \sigma(2), \dots, \sigma(n))
\end{aligned}$$

и аналогично при $q = n$ получим:

$$\int_{[c, b']} \det \{(A_{jk} y_j, y_j)\}_{j,k=1}^n dx = \frac{1}{(\rho_2)_t} \int_{c_n}^{b'_n} (S_n y_n, y_n) dx_n.$$

$$\cdot (-1)^{n+t} \sum_{\hat{\sigma}} \int_{c_1}^{b'_1} (A_{1,\sigma(1)} y_1, y_1) dx_1 \cdots \int_{c_{n-1}}^{b'_{n-1}} (A_{n-1,\sigma(n-1)} y_{n-1}, y_{n-1}) dx_{n-1} \cdots, (t \notin \sigma(1), \dots, \sigma(n-1)).$$

Из (26) при $q = 1$ получим:

$$\int_{[c,b']} \det \{(B_{jk} y_j, y_j)\}_{j,k=1}^n dx = \frac{1}{(\rho_1)_t} \int_{c_1}^{b'_1} (S_1 y_1, y_1) dx_1.$$

$$\cdot (-1)^{1+t} \sum_{\hat{\sigma}} \int_{c_2}^{b'_2} (B_{2,\sigma(2)} y_2, y_2) dx_2 \cdots \int_{c_n}^{b'_n} (B_{n,\sigma(n)} y_n, y_n) dx_n \cdots, (t \notin \sigma(2), \dots, \sigma(n)),$$

и аналогично при $q = n$ получим

$$\int_{[c,b']} \det \{(B_{jk} y_j, y_j)\}_{j,k=1}^n dx = \frac{1}{(\rho_1)_t} \int_{c_n}^{b'_n} (S_n y_n, y_n) dx_n.$$

$$\cdot (-1)^{n+t} \sum_{\hat{\sigma}} \int_{c_1}^{b'_1} (B_{1,\sigma(1)} y_1, y_1) dx_1 \cdots \int_{c_{n-1}}^{b'_{n-1}} (B_{n-1,\sigma(n-1)} y_{n-1}, y_{n-1}) dx_{n-1} \cdots, (t \notin \sigma(1), \dots, \sigma(n-1)).$$

Таким образом, здесь участвуют все элементы матрицы $\{(A_{jk} y_j, y_j)\}_{j,k=1}^n$ и $\{(B_{jk} y_j, y_j)\}_{j,k=1}^n$ кроме ее t -го столбца.

Отсюда получим, что если все $(A_{jk} y_j, y_j)$ и $(B_{jk} y_j, y_j) (k \neq t)$ «подчинены» $(S_j y_j, y_j)$ а также $(T_j y_j, y_j)$ «подчинены» $(S_j y_j, y_j)$, то тензорное произведение $\Psi_1 \otimes \cdots \otimes \Psi_n$ принадлежит пространству $L_2([c, b]; Q(x) dx)$.

Теперь поинтересуемся другими возможными решениями из $L^2([c, b]; |s_j| dx_j)$.

Рассмотрим формулу (5)

$$\int_{c_j}^{x_j} y_j^* (\xi_j, \lambda) S_j (\xi_j, \lambda) Y_j (\xi_j, \lambda) d\xi_j = \frac{1}{2i} W [G_j^*, G_j] \Big|_{c_j}^{x_j}.$$

Тогда из (2) получаем

$$W [G_j^*, G_j] (c_j) = 2i \left(G_j^* (c_j, \lambda) G_j' (c_j, \lambda) - [G_j^* (c_j, \lambda)]' \cdot G_j (c_j, \lambda) \right) = 0.$$

Далее

$$W [G_j^*, G_j] (x_j) = 2i \left(G_j^* (x_j, \lambda) G_j' (x_j, \lambda) - [G_j^* (x_j, \lambda)]' \cdot G_j (x_j, \lambda) \right) = 2i M_2 (x_j, \lambda).$$

Тогда

$$\int_{c_j}^{x_j} G_j^* (\xi_j, \lambda) S_j (\xi_j, \lambda) G_j (\xi_j, \lambda) d\xi_j = M_2 (x_j, \lambda).$$

Отсюда видно, что при $x_j < x'_j$, $M_2(x_j, \lambda) < M_2(x'_j, \lambda)$.

Поэтому существует

$$\lim_{x_j \rightarrow b_j} M_2(x_j, \lambda) \equiv M_2(\lambda) \geq 0.$$

Тогда если $M_2(\lambda) > 0$, то по определению имеем предельного круга $\{l : F(x_j, \lambda, l_j) \leq 0\}$, если $\ker M_2(\lambda) \neq \{0\}$, то случай предельной точки.

Если матрица $M_2(x_j, \lambda)$ невырожденная для некоторых значений $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, то можно найти дополнительные тензорные произведения решений, принадлежащие пространству $L_2([c_j, b]; |S_j| dx)$.

Эти соображения позволят оценить число таких произведений, т.е. числа решений линейно независимых тензорных произведения от многопараметрической системы уравнений (1) получается так: Это число является постоянными на каждой компоненте. $N_k, k = 1, 2, \dots, 2n$ множество $\lambda \in \Lambda$.

Отметим, что если $(B_{jk}(x_j))_{r_j \times r_j}$ является $O_{r_j \times r_j}$ матрицей, получается ([5],[6]).

Список литературы

- [1] Координгтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. «ИЛ» М.1958, с.240-284.
- [2] Левитан В.М. и др. Введение в спектральную теорию. «Наука» М.,1970, с.144-234.
- [3] Лидский В.Б. Несамосопряженный оператор типа Штурма-Лиувилля с дискретным спектром. Труды моск. матем. общ. 1960, т.9, с.45-75.
- [4] Исаев Г.А. К теории индексов дефекта многопараметрических дифференциальных операторов типа Штурма-Лиувилля. Докл. АН СССР, 1981, т.261, №4, с.788-791.
- [5] Алмамедов М.С. О собственных произведениях многопараметрических матричных уравнений Штурма-Лиувилля. Докл. АН СССР, 1989, т.305, №1, с.14-17.
- [6] Алмамедов М.С. О собственных произведениях многопараметрических матричных уравнений Штурма-Лиувилля. Journal of contemporary applied math. г. Баку, ISSN:2222-5498.v.6, №2, (2016), с.53-69.

М.С. Алмамедов

Азербайджанский Государственный Экономический Университет (UNEC)

E-mail: *mus.a.altamedov@mail.ru*