Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 9, No 2, 2019, December
ISSN 2222-5498

Корректная разрешимость одного класса операторно-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в гильбертовом пространстве

Р.Ф. Гатамова

Аннотация. В данной работе доказаны теоремы о корректной разрешимости одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка. Получены достаточные условия, которые обеспечивают корректную разрешимость данного уравнения. Эти условия выражены свойствами операторных коэффициентов данного уравнения.

Ключевые слова: гильбертово пространство, операторно-дифференциальное уравнение, вектор-функция, самосопряженный оператор, регулярное решение, резольвента, спектр.

Пусть H сепарабельное гильбертово пространство, C-положительно определенный самосопряженный оператор в H, с областью определения $D(C)$. Обозначим через $H_p (p \geq 0)$ шкалу гильбертовых пространств, порожденных оператором C, т.е. $H_p = D(C^p)$ со скалярным произведением $(x,y)_p = (C^p x,\ C^p y)\,,\quad x,y \in D(C^p)$. При $p = 0$ считаем, что $H_0 = H$.

Пусть $L_2\left(R^n; H\right)$ есть гильбертово пространство вектор-функции

$$f(x) = f(x_1, x_2 ... x_n),\ x = (x_1, x_2 ... x_n) \in R^n,$$

определенных почти всюду в H со значением в H с нормой

$$\|f\|_{L_2(R^n;H)} = \left(\int\limits_{R_n} \|f(x_1, x_2 ... x_n)\|_H^2 \, dx_1 dx_2 ... dx_n \right)^{1/2}.$$

Обозначим через $D\left(R^n; H_2\right)$ множество бесконечно дифференцируемых вектор-функций, определенных в R^n с компактными носителями. В линейном множестве $D\left(R^n; H_2\right)$ определим норму [ ]

$$\|u\| = \left(\sum_{\partial x_k}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\|_{L_2(R^n;H)}^2 + \left\|C^2 u\right\|_{L_2(R^n;H)}^2 \right)^{1/2}$$

Множество $D\left(R^n;H_2\right)$ по этой норме не является полным пространством. Его пополнение обозначим через $W_2^2(R^n;H_2)$.

В пространстве H рассмотрим операторно-дифференциальное уравнение

$$-\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^{n} R_k \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} + Tu(x) + C^2 u(x) = f(x),\ x \in R^n, \tag{1}$$

здесь $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $u(x) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ вектор-функции, определенные в R^n почти всюду со значениями в $H, a_k,\ k = 1, 2, ..., n$, положительные числа, $R_k,\ k = 1, 2, ..., n,$, T-линейные операторы в H, C-положительно определенный самосопряженный оператор в H.

Определение 1. Если при $f(x) \in L_2(R^n;H)$ существует вектор-функция $u(x) \in W_2^2(R^n;H)$, которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в R^n, то $u(x)$ называется регулярным решением уравнения (1).

Определение 2. Если при любом $f(x) \in L_2(R^n;H)$ существует регулярное решение $u(x)$, для которого имеет место оценка

$$\|u\|_{W_2^2(R^n;H)} \le C \cdot \|f\|_{L_2(R^n;H)}\ ,$$

то уравнение (1) называется корректно разрешимым. Сперва докажем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть C-положительно определенный самосопряженный оператор в $H, a_k > 0,\ \ k = 1, 2, ..., n$; операторы $R_k (k = 1, 2, ..., n)$ и iT симметрические операторы в H, причем $D(R_k) \supset D(C),\ \ D(T) \supset D(C^2)$. Тогда при $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in R^n$ имеет место оценка

$$\sum_{j=0}^{2} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2\right)^j \cdot \left\| C^{2-j} L^{-1} \left(i\xi, i\xi_2, ..., \xi_n\right) \right\| \le const, \tag{2}$$

где

$$L\left(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n\right) = L_0\left(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n\right) + L_1\left(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n\right)$$

а

$$L_0\left(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k^2 E + C^2\right)$$

$$L_1\left(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} R_k i\xi_k + T\right)\ .$$

Доказательство. Пусть $\psi \in D(C^2)$.

Из симметричности операторов R_k и iT и из условия $D(R_k) \supset D(C),\ \ D(T) \supset D(C^2)$ следует, что они замыкаемы, а из теоремы о замкнутом графике следует, что операторы $R_k C^{-1} (k = 1, 2, ..., n)$ и TC^{-2} ограничены в H.

Легко видеть, что для оператора

$$L_1\left(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n\right) = \sum_{i=1}^{n} i\xi_k R_k + T$$

имеет место равенство

$$\left(L_1\left(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n\right)\psi_1\psi\right)_H = i\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_k R_k\psi, \psi\right)_H + (T\psi, \psi)_H =$$

$$= i\left[\sum_{k=1}^{n}\left[\xi_k(R_k\psi, \psi) - i(T\psi, \psi)\right]\right] \,,$$

т.е. $(L_1(i\xi_1, i\xi_2 ... i\xi_n\psi, \psi)_H$ мнимое число. Тогда

$$|(L(i\xi_1, i\xi_2 ... i\xi_n\psi, \psi)| = \left|L_0\left(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n\right) + L_1\left(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n\right)\right| \geq$$

$$\geq \left(L_0\left(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n\right)\psi, \psi\right) = \left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\xi_k^2 + C^2\right)\psi, \psi\right) \geq$$

$$\geq \left(C^2\psi, \psi\right) + \sup_k a_k \sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 \|\psi\|^2 \geq const\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2 + \mu_0^2\right)\|\psi\|^2 \,,$$

где μ_0 есть нижняя граница спектра оператора $L^{-1}\left(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n\right)$. Следовательно, оператор C существует и

$$\left(L^{-1}\left(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n\right)\psi, \psi\right) \leq \left\|L^{-1}\left(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n\right)\psi\right\| \cdot \|\psi\| \,,$$

т.е.

$$\left\|L^{-1}\left(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n\right)\psi\right\| \cdot \|\psi\| \geq \left(L^{-1}\left(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n\right)\psi, \psi\right) \geq$$

$$\geq const\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2 + \mu_0^2\right)\|\psi\|^2 \,.$$

Следовательно,

$$\left\|L^{-1}\left(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n\right)\psi\right\| \geq const\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2 + \mu_0^2\right)\|\psi\|$$

Таким образом, при $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in R^n$ резольвента $L^{-1}\left(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n\right)$ существует и

$$\left\|L^{-1}\left(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n\right)\right\| \geq const\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2 + \mu_0^2\right)^{-1} 4$$

или

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2+\mu_0^2\right)\cdot\left\|L^{-1}\left(i\xi_1,i\xi_2,...,i\xi_n\right)\right\|\geq const.$$

Отсюда следует, что

$$\left\|\left|\xi_k\right|^2L^{-1}\left(i\xi_1,i\xi_2,...,i\xi_n\right)\right\|\leq const,\ \ k=1,2,...,n \tag{3}$$

$$\left\|L^{-1}\left(i\xi_1,i\xi_2,...,i\xi_n\right)\right\|\leq const, \tag{4}$$

поскольку $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\left|\xi_k\right|^2+\mu_0^2\right)\geq\mu_0^2$. Теперь покажем, что

$$\left\|C^2L^{-1}\left(i\xi_1,i\xi_2,...,i\xi_n\right)\right\|\leq const.$$

Пусть $x\in H$. Тогда $\psi=C^{-2}x\in H_2$. В этом случае получаем, что

$$\left(L\left(i\xi_1,i\xi_2,...,i\xi_n\right)C^{-2}x,C^{-2}x\right)\geq\left(L_0^{-1}\left(i\xi_1,i\xi_2,...,i\xi_n\right)C^{-2}x,C^{-2}x\right)\geq 4$$

$$\geq\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\xi_k\right|^2E+C^2\right)C^{-2}x,C^{-2}x\right)=\sum_{k=1}^{n}\left|\xi_k\right|^2\left\|C^{-2}x\right\|^2+\left(x,C^{-2}x\right)\ .$$

Отсюда получаем, что

$$\left(x,C^{-2}x\right)\leq\left|L\left(i\xi_1,i\xi_2,...,i\xi_n\right)C^{-2}x,C^{-2}x\right|\leq$$

$$\leq\left\|L\left(i\xi_1,i\xi_2,...,i\xi_n\right)C^{-2}x\right\|\cdot\left\|C^{-2}x\right\|\leq$$
$$\leq\left\|L\left(i\xi_1,i\xi_2,...,i\xi_n\right)C^{-2}x\right\|\cdot\left\|C^{-2}x\right\|\cdot\left\|x\right\|\ . \tag{5}$$

Так как C^{-2} самосопряженный оператор, то

$$\sup_{\|x\|=1}\left(x,C^{-2}x\right)=\left\|C^{-2}\right\|\ .$$

Тогда имеем

$$\sup_{\|x\|=1}\left(x,C^{-2}x\right)\leq\sup_{\|x\|=1}\left\|L\left(i\xi_1,i\xi_2,...,i\xi_n\right)C^{-2}x\right\|\cdot\left\|C^{-2}x\right\|\cdot\left\|x\right\|,$$

т.е.

$$\left\|C^{-2}\right\|\leq\sup_{\|x\|=1}\left\|L\left(i\xi_1,i\xi_2,...,i\xi_n\right)C^{-2}x\right\|\cdot\left\|C^{-2}x\right\|\ .$$

Отсюда имеем, что

$$\sup\left\|L\left(i\xi_1,i\xi_2,...,i\xi_n\right)C^{-2}x\right\|\geq 1.$$

А это означает, что

$$\left\|C^2L^{-1}\left(i\xi_1,i\xi_2,...,i\xi_n\right)C^{-2}x\right\|\leq 1. \tag{6}$$

С этой целью рассмотрим выражение

$$\|\xi_k C\varphi\|^2 = \int\limits_{\mu_0}^{\infty} \xi_k^2 \mu_2 d\,(E\varphi,\varphi)\,, \quad \varphi \in D(C^2).$$

Очевидно, что

$$\frac{\xi_k^2\mu^2}{\left(\xi_k^2+\mu^2\right)^2} \le \frac{\frac{\xi_k^2}{\mu^2}}{\left(\frac{\xi_k^2}{\mu^2}+1\right)^2} \le \frac{\tau^2}{\left(t\tau^2+1\right)^2} \le 1.$$

Поэтому

$$\|\xi_k C\varphi\|^2 = \int\limits_{\mu_0}^{\infty} \xi_k^2 + \mu_2 d\,(E\mu\varphi,\varphi) \le \left\|\xi_k^2\varphi\right\|^2 + \left\|C^2\varphi\right\|^2.$$

Таким образом,

$$\left\|\xi_k C L^{-1}\,(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n)\,\varphi\right\|^2 \le \left\|\xi_k^2 L^{-1}\,(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n)\,\varphi\right\|^2 +$$

$$+\left\|C^2 L^{-1}\,(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n)\,\varphi\right\|^2 \le$$

$$\le \left(\left\|\xi^2 L^{-1}\,(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n)\right\|^2 + \left\|C^2 L^{-1}\,(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n)\right\|^2\right) \|\varphi\|^2. \tag{7}$$

Из оценок (3), (4), (6) и (7) следует, что

$$\sum_{j=0}^{2}\left(1+\sum_{k=1}^{2}|\xi_k|\right)^j \left\|C^{2-j} L^{-1}\,(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n)\right\| \le const.$$

Теорема 1 доказана.

Из этой теоремы следует следующая теорема о корректной разрешимости уравнения (1).

Теорема 2. Пусть C-положительно определенный самосопряженный оператор, $a_k > 0$ $(k = 1, 2, ..., n)$, R_k $(k = 1, 2, ..., n)$. и iT симметричны в H, причем $D(R_k) \supset D(C)$, $D(T) \supset D(C^2)$. Тогда уравнение (1) корректно разрешимо.

Доказательство. Пусть $f(x) = f(x_1, x_2...., x_n) \in L_2(R^n; H)$. Тогда по теореме 1 логично определить вектор-функцию

$$\widehat{u}\,(\xi_1, xi_2, ..., \xi_n) = l^{-1}\,(ixi_1, ixi_2, ..., i\xi_n)\,\widehat{f}\,(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)\,,$$

где $\widehat{f}\,(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ есть преобразование Фурье вектор-функции $f\,(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$. Положим

$$u\,(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{R^n} \widehat{u}\,(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)\, e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi_1, d\xi_2 ... d\xi_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{R^n} L^{-1}\left(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n\right) \widehat{f}\left(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\right) e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi_1...d\xi_n,$$

где $\langle x,\xi\rangle = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + ... + x_n\xi_n$. Из теоремы 1 следует, что

$$\sum_{j=0}^{2}\left(1+\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^j\right)\left\|C^{2-j}L^{-1}\left(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n\right)\widehat{f}\left(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\right)\right\|_{L_2(R^n;H)} \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{2}\left(1+\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^j\right)\left\|C^{2-j}L^{-1}\left(i\xi_1, i\xi_2, ..., i\xi_n\right)\right\| \cdot \left\|\widehat{f}\left(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\right)\right\|_{L_2(R^n;H)} \le$$

$$\le const \left\|\widehat{f}\left(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\right)\right\|_{L_2(R^n;H)} = const \cdot \|f\|_{L_2(R^n;H)}.$$

Таким образом, $u(x_1, x_2...x_n) = u(x) \in W_2^2(R^n; H)$ и

$$\|u\|_{W_2^2(R^n;H)} \le const \cdot \|f\|_{L_2(R^n;H)}.$$

Теорема доказана. Отметим, что подобные задачи в случае $a_k = 1, \ n = 2$ были рассмотрены в работе [4]. Для операторно-дифференицальных уравнений с частными производными четвертого порядка вопросы разрешимости исследованы в работе [5]. Вопросы однозначной, нормальной и фредгольмовой разрешимости операторно-дифференицальных уравнений высокого порядка рассмотрены в работах [1-3] и [6]. Выражаю глубокую благодарность научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Г.И. Асланову за постановку задач и ценные советы.

Список литературы

[1] Асланов Г.И. О разрешимости и асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Успехи мат. наук, 1993, вып. 4, -С. 172-173.

[2] Асланов Г.И. О разрешимости операторно-дифференциальных уравнений с частными производными в гильбертовом пространстве и некоторых их применениях. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, том XVIII, No 4-5, -С. 9-14.

[3] Aslanov G.I. Normal solvability of operator-differential equations with partial derivatives in Hilbert space. Proceedings of IMM NAS Azerbaijan, 2000, vol. XII, p. 21-25.

[4] Jafarov I.J. On solvability of one class of partial operator differential equations. Proceedings of IMM of NAS Azerbaijan, 2004, vol. 20, p. 57-62.

[5] Ismailova M.F. On the solvability of one class fourth order elliptic type operator-differential equations. Proceedings of IMM of Azerbaijan, 2005, vol. 23, p. 53-58.

[6] Сулейманов Н.М. О разрешимости одного класса дифференциальных уравнений в частных производных в гильбертовом пространстве. Jurnal of Contemporary Applied Mathematics., 2017, vol. 7, issue 2, p. 61-67.

[7] Ягубова Х.В. Об условиях разрешимости операторно-дифференциальных уравнений в частных производных. Вестник БГУ, серия физ.-мат. наук, 2017, vol. 7, No 2, p. 61-67.

Р.Ф. Гатамова
Сумгаитский Государственный Университет
E-mail: hetemova_roya@mail.ru