Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 10, No 1, 2020, July
ISSN 2222-5498

Принцип Максимума Понтрягина для Задач Оптимального Управления с Нелокальными Краевыми Условиями

Ф.М. Зейналлы

Аннотация. В данной работе исследуется задача оптимального управления, в которой состояние управляемого объекта описывается системой обыкновенного дифференциального уравнения с нелокальными краевыми условиями. Сначала исследуемая краевая задача приводится к эквивалентному интегральному уравнению и с помощью принципа сжатых отображений доказана существование и единственности решений краевой задачи при каждом фиксированном допустимом управлений. С помощью метода приращений доказываются принцип максимума Понтрягина.

Ключевые слова: нелокальная краевая задача, задача оптимального управления, необходимое условие оптимальности, Принцип максимума Понтрягина.

1. Введение

Математическое моделирование целого ряда реальных процессов часто приводит к дифференциальным уравнениям с нелокальными условиями [1-3]. При этом решение многих задач механики и процессов управления [4] сводится к нелокальным краевым задачам. В большинстве случаев нелокальные краевые задачи могут быть двухточечными, многоточечными, интегральными или их различными линейными комбинациями. Нелокальные условия в интегральной форме возникают тогда, когда граница протекания процесса недоступна для измерения основных характеристик системы и, при этом известно только их среднее значение [5-7].

В последние годы приобрели особую актуальность задачи оптимального управления с нелокальными условиями. В работах [10-19] получены необходимые условия оптимальности для задач оптимального управления, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений с нелокальными условиями. В этих работах нелокальные условия, в основном, сохраняют в себе двухточечные и интегральные краевые условия.

Конструктивные достаточные условия существования и единственности, а так же методы численного решения таких краевых задач изучены в [8,9].

В настоящей работе исследуемая краевая задача приводится к эквивалентному интегральному уравнению, и далее, применяя принцип сжатых отображений к интегральному уравнению, доказывается теорема существования и единственности решений рассматриваемой задачи. В работе также доказывается принцип максимума Понтрягина для задач оптимального управления, описываемых обыкновенным дифференциальным уравнением с нелокальными краевыми условиями.

2. Постановка задачи.

Пусть управляемый процесс на фиксированном отрезке времени $[0,T]$ описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,u) \tag{1}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$Ax\,(0) + \int_0^T m\,(t)\,x\,(t)\,dt = C, \tag{2}$$

где $x(t) \in R^n$; $f(t,x,u)-$заданная n-мерная вектор-функция; $C \in R^n-$ заданный постоянный вектор; $m\,(t) \in R^{n\times n}$ – заданная матрица, $u(t)-$ $r-$мерный измеримый и ограниченный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного множества U, т.е.

$$u(t) \in U \subset R^r, \qquad t \in [0,T] \tag{3}$$

Требуется на решениях задачи (1) - (3) минимизировать функционал

$$J(u) = \varphi(x(0),x(T)) + \int_0^T F(t,x,u)dt \tag{4}$$

Здесь предполагается, что функции $f(t,x,u)$, $F(t,x,u)$ и $\varphi(x,y)$ непрерывны по совокупности своих аргументов и имеют ограниченные частные производные относительно x и y. Под решением задачи (1) - (3), соответствующей допустимому управлению $u(t)$, понимается абсолютно непрерывная функция $x(t) : [0,T] \to R^n$.

Через $C([0,T],R^n)$ обозначим пространство непрерывных функций на отрезке $[0,T]$ со значениями из пространства R^n. Очевидно, такое пространство является банаховым с нормой

$$\|x\|_{C[0,T]} = \max_{[0,T]} |x(t)|\,,$$

где $|\cdot|$-является нормой в R^n.

Допустимый процесс $\{u(t),x(t,u)\}$, являющийся решением задачи (1)-(4), т.е. доставляющий минимум функционалу (4) при ограничениях (1)-(3), будем называть оптимальным процессом, а $u(t)-$ оптимальным управлением.

3. Существование решений краевой задачи (1)-(3).

В дальнейшем предполагается выполнение следующих условий:
(A1) Пусть $\det N \neq 0$, где $N = A + \int_0^T m(t)\, dt$.
(A2) Функция $f : [0,T] \times R^n \times R^n \to R^n$ непрерывна и существует постоянная $K \geq 0$ такая, что

$$|f(t,x,u) - f(t,y,u)| \leq K\,|x-y|\,, t \in [0,T],\ \ x,y \in R^n, u \in U.$$

(A3) $L = KTM < 1$,
здесь $M = \max\limits_{0 \leq t,s \leq T} \|M(t,s)\|\,,$
$M(t,s)-$определяется равенством

$$M(t,s) = \begin{cases} N^{-1}\left(A + \int_0^t m(s)\, ds\right), & \text{если} \quad s < t, \\ -N^{-1}\int_t^T m(s)\, ds, & \text{если} \quad t \leq s. \end{cases} \tag{5}$$

Теорема 3.1. *Пусть выполняется условие A1).*

Функция $x(\cdot) \in C([0,T], R^n)$ является абсолютно непрерывным решением задачи (1) - (3) *тогда и только тогда, когда*

$$x(t) = N^{-1}C + \int_0^T M(t,s) f(s, x(s), u(s)) ds, \tag{6}$$

где матрица функции $M(t,s)$ определяется равенством (5).

Доказательство. Пусть функция $x = x(t)$ является решением уравнения (1). Тогда для $t \in (0,T)$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s), u(s)) ds, \tag{7}$$

где $x(0)$ произвольный постоянный вектор. Для определения $x(0)$ требуемая функция, определенная равенством (7), удовлетворяет условию (2)

$$\left(A + \int_0^T m(t)\, dt\right) x(0) = C - \int_0^T m(t) \int_0^t f(s, x(s), u(s))\, dsdt \tag{8}$$

Так как, согласно условию (A1), $\det N \neq 0$, то из равенства (8) следует

$$x(0) = N^{-1}C - N^{-1}\int_0^T m(t) \int_0^t f(s, x(s), u(s))\, dsdt. \tag{9}$$

Учитывая значение $x(0)$, определяемого равенством (9) в (7), имеем

$$x(t) = N^{-1}C - N^{-1}\int_0^T m(t) \int_0^t f(s, x(s), u(s))\, dsdt + \int_0^T f(s, x(s), u(s))\, ds. \tag{10}$$

Далее, введя матрицу функции

$$M(t,s) = \begin{cases} N^{-1}\left(A + \int_0^t m(s)\,ds\right), & 5A;8 \quad s < t, \\ -N^{-1}\int_t^T m(s)\,ds, & 5A;8 \quad t \le s, \end{cases}$$

равенство (10) можно записать в следующем эквивалентном виде

$$x(t) = N^{-1}C + \int_0^T M(t,s)f(s,x(s),u(s))ds.$$

Таким образом, доказано, что краевую задачу (1) - (3) можно переписать в эквивалентном интегральном виде (6). Прямым вычислением можно показать что, решение интегрального уравнения (6) является и решением краевой задачи (1) - (3). □

Теорема 3.2. *Пусть выполняются условия A1) - A3). Тогда, для любого* $C \in R^n$ *и для любого фиксированного допустимого управления краевая задача* (1) - (3) *имеет единственное решение, которое удовлетворяет интегральному уравнению* (6)

Доказательство. Пусть $C \in R^n$ и $u(\cdot) \in U$ фиксированы. Рассмотрим отображение $P : C([0,T],R^n) \to C([0,T],R^n)$ определенного как

$$(Px)(t) = N^{-1}C + \int_0^T M(t,s)f(s,x(s),u(s))ds \tag{11}$$

Очевидно, неподвижные точки оператора P являются решением краевой задачи (1)-(2). Используя метод сжимающих операторов Банаха, покажем, что оператор P, определяемый равенством (11), имеет неподвижную точку. Для любых $v, \omega \in C([0,T]), R^n)$ имеем

$$\begin{aligned} &|(Pv)(t) - (P\omega)(t)| \le \int_0^T |M(t,s)| \cdot |f(s,v(s),u(s)) - f(s,\omega(s),u(s))|\,ds \le \\ &\le KTM \left\|v(\cdot) - \omega(\cdot)\right\|_{C[0,T]}, \end{aligned} \tag{12}$$

или

$$\left\|(Pv)(t) - (P\omega)(t)\right\|_{C[0,T]} \le KTM \left\|v(\cdot) - \omega(\cdot)\right\|_{C[0,T]}.$$

Здесь, учитывая условие A3), получаем, что оператор P, определяемый равенством (11), является сжимающим. Тогда оператор P имеет единственную подвижную точку в $C([0,T],R^n)$. Отсюда следует, что интегральное уравнение (6) имеет единственное решение.

Теорема 2 доказана. □

4. Формула приращения критерия качества.

Для доказательства принципа максимума Понтрягина воспользуемся методом приращений, впервые примененным в [20].

Пусть$u(t)$, $\tilde{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $t \in [0,T]-$ два допустимых управления, а$x(t)$, $\tilde{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$, $t \in [0,T]-$ соответствующие им траектории. Тогда, очевидно, $\Delta x(t)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\Delta \dot{x}(t) = \Delta f(t,x,u), \qquad t \in [0,T], \tag{13}$$

$$A\Delta x\,(0) + \int_0^T m\,(t)\,\Delta x\,(t)\,dt = 0. \tag{14}$$

Здесь $\Delta f(t,x,u) = f(t,\tilde{x},\tilde{u}) - f(t,x,u)$ - полное приращение функции $f(t,x,u)$. Приращение функционала (4) можно записать в виде:

$$\Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u) = \Delta\varphi(x(0),x(T)) + \int_0^T \Delta F(t,x,u)dt. \tag{15}$$

Пусть $\psi(t) \in R^n$- произвольная нетривиальная вектор-функция и $\lambda \in R^n$ - числовой вектор. Тогда формулу приращения функционала (4) можем переписать в виде

$$\begin{aligned}&\Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u) = \Delta\varphi(x(0),x(T)) + \\ &+ \textstyle\int_0^T \Delta F(t,x,u)dt + \int_0^T \langle\psi(t), \Delta\dot{x}(t) - \Delta f(t,x,u)\rangle\,dt + \\ &+ \left\langle \lambda, A\Delta x\,(0) + \textstyle\int_0^T m\,(t)\,\Delta x\,(t)\right\rangle.\end{aligned} \tag{16}$$

После некоторых стандартных операций, обычно используемых при выводе необходимых условий оптимальности первого порядка для формулы приращений, получаем следующее равенство

$$\begin{aligned}&\Delta J(u) = -\textstyle\int_0^T \Delta_u H(t,\psi,x,u)dt - \int_0^T \left\langle \Delta_u \frac{\partial H(t,\psi,x,u)}{\partial x}, \Delta x(t)\right\rangle dt + \\ &+ \textstyle\int_0^T \left\langle \dot{\psi}(t) + \frac{\partial H(t,\psi,x,u)}{\partial x} + m'\,(t)\,\lambda, \Delta x\,(t)\right\rangle dt + \\ &+ \left\langle -\psi(0) + A'\lambda + \frac{\partial\varphi}{\partial x(0)}, \Delta x\,(0)\right\rangle + \left\langle \psi(T) + \frac{\partial\varphi}{\partial x(T)}, \Delta x(T)\right\rangle + \\ &+ \eta_{\bar{u}}, \\ &\eta_{\bar{u}} = o_\varphi\left(\|x(0)\|, \|x(T)\|\right) - \textstyle\int_0^T o_H\left(\|x(t)\|\right)dt,\end{aligned} \tag{17}$$

где

$$H(t,\psi,x,u) = \langle\psi(t), f(t,x,u)\rangle - F(t,x,u).$$

Теперь предположим что, неизвестная вектор-функция $\psi(t) \in R^n$ и числовой вектор λ являются решением следующей краевой задачи:

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(t,\psi,x,u)}{\partial x} - m'\,(t)\,\lambda, \qquad t \in [0,T], \tag{18}$$

$$\psi(0) = A'\lambda + \frac{\partial\varphi}{\partial x(0)}, \quad \psi(T) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x(T)}, \tag{19}$$

Дифференциальная краевая задача (18)-(19) называется сопряженной задачей в параметрической форме, так как она сохраняет в себе неизвестный параметр λ.Из условия A1) и из системы (18), (19) можно исключить неизвестный вектор λ. Действительно,

$$\left(A' + \int_0^T m'(t)\,dt\right)\lambda = 2\psi(0) - \psi(T) - \frac{\partial\varphi}{\partial x(0)} - \int_0^T \frac{\partial H(t,\psi,x,u)}{\partial x}dt.$$

Отсюда

$$\lambda = (N')^{-1}\left[2\psi(0) - \psi(T) - \frac{\partial\varphi}{\partial x(0)} - \int_0^T \frac{\partial H(t,\psi,x,u)}{\partial x}\right]dt. \tag{20}$$

Учитывая найденное из (20) значение λ в равенствах (18) и (19), имеем:

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(t,\psi,x,u)}{\partial x} - m'(t)\left(N'\right)^{-1}\times$$

$$\times\left[2\psi(0) - \psi(T) - \frac{\partial\varphi}{\partial x(0)} - \int_0^T \frac{\partial H(t,\psi,x,u)}{\partial x}\right],\ t\in[0,T],\ \psi(T) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x(T)}, \tag{21}$$

С учетом равенств (18), (19) в (17), для приращения функционала получаем окончательную форму

$$\Delta J(u) = -\int_0^T \Delta_{\bar{u}} H(t,\psi,x,u)dt - \int_0^T \left\langle \Delta_u \frac{\partial H(t,\psi,x,u)}{\partial x},\ \Delta x(t)\right\rangle dt + \eta_{\tilde{u}}. \tag{22}$$

5. Принцип максимума.

Известно, что при доказательстве принципа максимума Понтрягина основную роль играет игольчатая вариация:

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t\notin[\theta,\theta+\varepsilon), \\ \upsilon, & t\in[\theta,\theta+\varepsilon), \end{cases} \tag{23}$$

где параметры игольчатой вариации удовлетворяет следующим условиям. $\theta\in[0,T]-$ правильная точка управления $u(t)$, $\varepsilon>0$, $\theta+\varepsilon<T$, $\upsilon\in U$. Очевидно, что при любых $\theta,\varepsilon,\upsilon$, удовлетворяющих перечисленным условиям, управления $\bar{u}(t)$ является допустимым.

Традиционная форма необходимых условий оптимальности будет следовать из формулы приращений (22), если покажем, что приращение фазовых состояний $\Delta_\varepsilon x(t)$, соответствующее $\Delta u_\varepsilon(t)$ имеет порядок ε.

Это следует из условий A1) - A3) и краевой задачи (13), (14):

$$\Delta x(t) = \int_0^T M(t,s)\left[f(s,x+\Delta x,\bar{u}) - f(s,x,\bar{u})\right]ds + \int_0^T M(t,s)\Delta_{\bar{u}} f(s,x,u)ds \tag{24}$$

Из (24) мы получаем

$$\|\Delta x(t)\| \leq (1-L)^{-1} M \int_0^T \|\Delta_{\bar{u}} f(t,x,u)\| \, dt. \tag{25}$$

Если в неравенстве взять, $\bar{u}(t) = u_\varepsilon(t)$, то имеем

$$\|\Delta_\varepsilon x(t)\| \leq \tilde{L}\varepsilon, \quad t \in [0,T], \quad \tilde{L} = const > 0, \tag{26}$$

Оценка (25) показывает что, при $\bar{u}(t) = u_\varepsilon(t)$

$$\int_\theta^{\theta+\varepsilon} \left\langle \Delta_\upsilon \frac{\partial H(t,\psi,x,u)}{\partial x}, \Delta_\varepsilon x(t) \right\rangle dt + \eta_{u_\varepsilon}\left(\|\Delta_\varepsilon x(t)\|\right) = o(\varepsilon),$$

где $\Delta_\varepsilon x(t) = x(t,u_\varepsilon) - x(t,u) \sim \varepsilon$.

Используя формулу приращения (22) и свойства игольчатой вариации, имеем

$$\Delta J(u) = -\int_\theta^{\theta+\varepsilon} \Delta_\upsilon H(t,\psi,x,u) dt + o(\varepsilon). \tag{27}$$

Так как точка $t = \theta$ - правильная точка управления $u = u(t)$, то из формулы Тейлора

$$\Delta J(u) = -\Delta_\upsilon H(\theta,\psi(\theta),x(0),u(0)\varepsilon + o(\varepsilon), \quad \upsilon \in U, \ \theta \in [0,T). \tag{28}$$

Из формулы (28) следует принцип максимума Понтрягина.

Теорема 5.1. ***(Принцип максимума)*** *Пусть допустимый процесс* $u^0(t), x^0(t,u^0)$ *оптимален в задаче* (1) - (4)*, а* $\psi^0(t)$ *- решение сопряженной задачи* (18), (19)*. Тогда для почти всех* $t \in [0,T]$ *выполняется равенство*

$$\max_{\upsilon \in U} H(t,\psi^0(t),x^0(t),\upsilon) = H(t,\psi^0(t),x^0(t),u^0(t)). \tag{29}$$

Из принципа максимума следует:

Следствие 5.2. *Если в задаче оптимального управления функция f линейно относительно (x,u) и функции φ, F выпуклы относительно $x(0), x(T)$ и $x(t)$, соответственно, то принцип максимума является необходимым и достаточным условием для оптимальности.*

Этот факт следует из формулы приращения (22). Действительно, в этом случае

$$\Delta J(u) = -\int_0^T \Delta_{\bar{u}} H(t,\psi,x,u) dt + o_\varphi\left(\|\Delta x(0)\|, \|\Delta x(T)\|\right) + \int_0^T o_F\left(\|\Delta x(t)\|\right) dt. \tag{30}$$

Так как функции φ и F выпуклы, то $o_\varphi \geq 0, \ o_F \geq 0$.

В дальнейшем предположим, что функция $f(t,x,u)$ дифференцируема относительно u, а множество U - выпукло. Тогда из теоремы 3 следует:

Следствие 5.3. ***(Дифференциальный принцип максимума).*** *Пусть процесс* $(u^0(t), x^0(t, u^0))$, $t \in [0, T]$ *оптимален в задаче* (1) - (4) *и* $\psi^0(t)$ *соответствующий решение сопряженной задачи* (18)-(19). *Тогда*

$$\left\langle \frac{\partial H(t, \psi^0(t), x^0(t), u^0(t))}{\partial u}, u^0(t) \right\rangle = \max_{v \in U} \left\langle \frac{\partial H(t, \psi^0(t), x^0(t), u^0(t))}{\partial u}, v \right\rangle. \qquad (31)$$

Заметим, что условие (31) для проверки проще, чем условие (29). Однако, предположения выпуклости U и дифференцируемости функции $f(t, x, u)$ по u сужает применение условия (31).

Отметим, что существуют задачи оптимального управления, для которых условие (31) справедливо, а принцип максимума никакой информация не дает [21]. С этим определяется значение дифференциального принципа максимума.

Из принципа максимума следует

Следствие 5.4. ***(Принцип стационарности).*** *Пусть в задаче оптимального управления* (1)-(4) $U \subset R^r$ *- открытое множество. Тогда оптимальное управление в каждой* $t \in [0, T]$ *доставляет стационарное значение функции* $H(t, \psi, x, u)$, *т.е.*

$$\frac{\partial H(t, \psi^0(t), x^0(t), u^0(t))}{\partial u} = 0.$$

Список литературы

[1] Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. Уравнения, 1980, Т.16, №11, С. 1925-1935.

[2] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных, Москва, Наука, 2006, 287с.

[3] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии, Москва, Высш. шк., 1995, 301 с.

[4] Бордюг В.Л., Ларин В.Б., Тимошенко А.Г. Задачи управления шагающими аппаратами.- Киев: Наук. Думка, 1985.-168с.

[5] Cannon I.R., The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart.Appl.Math., 1963, V.21, No.2, pp.155-160.

[6] Камынин Л.И. 6. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими условиями // Журн. Вычисл.математики и матем. Физики, 1964, т.4, №6, с.1006-1024.

[7] Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач /Докл. АН СССР- 1969-185, № 4.- с. 739-740.

[8] Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М. Задача управления с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики», Киев, 2013, No.2, с.61-77.

[9] Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М. О решении краевых задач с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Дифференциальные уравнения, Минск,2013,т.49,№9,с.1152–1162.

[10] Sharifov Y.A. Conditions Optimality in Problems Control with Systems Impulsive Differential Equations Under Non-Local Boundary Conditions, Ukrainian Mathematical Journal, 2012, vol.64, No 6, pp.836-847.

[11] Sharifov Y.A., Mammadova N.B., Optimal control problem described by impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions, Differential equations, Vol.50, No.3, 2014, pp.403-411.

[12] Ashyralyev A., Sharifov Y.A. Optimal Control Problems for Impulsive Systems with Integral Boundary Conditions, EJDE, 2013, Vol.2013, 2013, No 80, pp.1-11.

[13] A.R. Safari, M.F. Mekhtiyev, Y.A. Sharifov, Maximum Principle in the Optimal Problems for Systems with Integral Boundary Conditions and its Extension, Hindawi Publishing Corporation, Abstract and applied analysis, Vol.2013, ID 946910, 9 pages.

[14] Sharifov Y.A., Mammadova N.B., On second-order necessary optimality conditions in the classical sense for systems with nonlocal conditions// Differential equations, 2012, Vol.48, No.4, pp.1-4.

[15] Шарифов Я.А. Оптимальное управление для систем с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях// Известия вузов, Математика, 2013, №2, с.75-84.

[16] Sharifov Y.A., Mammadova N.B. Optimal control problem described by impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions// Differential equations, Vol.50, No.3, 2014, pp.403-411.

[17] Шарифов Я.А. Задача оптимального управления для систем с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях// Вестник Сам. гос. техн. ун-та, Сер., Физ.-мат. Науки, 2013, №4(30), с.34-45.

[18] Mardanov M.J., Sharifov Y.A. Pontryagin's maximum principle for the optimal control problems with multipoint boundary conditions// Abstract and Applied Analysis, Vol. 2015(2015), Id 428042, 6 pages.

[19] Марданов М.Дж., Мансимов К.Б., Меликов Т.К. Исследование особых управлений и необходимые условия оптимальности второго порядка в системах с запаздыванием. Баку, Элм, 356 с.

[20] Розоноэр Л.И. Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем.1-3 //Автоматика и телемеханика.1959, тт.20-22, №:10-12, с.1320-1334, 1441-1456, 1561-1578.

Ф.М. Зейналлы
Гянджинский Государственный Университет
E-mail: farahzeynalli@rambler.ru

Received 28 August 2019
Accepted 18 January 2020