Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 10, No 1, 2020, July
ISSN 2222-5498

К Спектральной Теории Возмущенного Осциллятора на Полуоси

А.Х.Ханмамедов, Г.М.Масмалиев, Н.Ф.Гафарова

Аннотация. Рассмотрен возмущенный осциллятор $T(q) = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + q(x)$ на полуоси $0 \leq x < \infty$ с граничным условием Дирихле. Изучены свойства собственных функций. Доказано ограниченная сходимость ядра интегрального уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко.

Ключевые слова: возмущенный осциллятор, уравнение Шредингера, собственные значения, ограниченная сходимость, обратная спектральная задача.

1. Введение и основной результат

Рассмотрим краевую задачу, порождаемую на полуоси $0 \leq x < \infty$ дифференциальным уравнением

$$-y'' + x^2 y + q(x) y = \lambda y, \quad \lambda \in C, \tag{1}$$

и краевым условием

$$y(0) = 0 \tag{2}$$

в том случае, когда функция $q(x)$ вещественна и удовлетворяет условиям

$$q(x) \in C^{(1)}[0, \infty), \sigma_j(0) = \int_0^\infty x^j |q(x)| dx < \infty, \ j \leq 5, \tag{3}$$

где $\sigma_j(x) = \int_x^\infty t^j |q(t)| dt$, $x \geq 0$, которые всюду в дальнейшем считаются выполненными.

Уравнение вида (1), т.е. уравнение Шредингера с квадратичным потенциалом, представляет собой задачу о квантовом осцилляторе и возникает при описании колебательных движений атомов в молекулах и кристаллах (см.[1]). В работе[2] Мак-Кина-Трубовица рассматривалась обратная спектральная задача для возмущенных осцилляторов

$$T(q) = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + q(x), \ -\infty < x < \infty,$$

имеющих одинаковый спектр, с потенциалами $q(x)$ из класса достаточно гладких и быстро убывающих на $\pm\infty$ функций (см. также [3], [4]). Последняя задача исследовалась также в работе Б.М.Левитана [5]. Там же высказано предположение о том, что потенциалы возмущения могут быть построены при помощи формализма интегральных уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко.

Рассмотрим невозмущенное уравнение

$$-y'' + x^2 y = \lambda y, \ 0 \leq x < \infty, \quad \lambda \in C \tag{4}$$

Известно[3] – [7], что уравнение (4) имеет решение $f_0(x,\lambda)$ в виде

$$f_0(x,\lambda) = D_{\frac{\lambda-1}{2}}\left(\sqrt{2}x\right),$$

которое удовлетворяет начальным условиям

$$f_0(0,\lambda) = 2^{\frac{\lambda-1}{4}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-\lambda}{4}\right)}, f_0'(0,\lambda) = 2^{\frac{\lambda-1}{4}}\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)},$$

где $D_\nu(x)$ - функция Вебера, $\Gamma(\cdot)$- Гамма функция. Для каждого x функция $f_0(x,\lambda)$ является (см.[3], [7]) целой функцией и обладает равномерно при всех λ, взятых из любой ограниченной области, асимптотикой:

$$f_0(x,\lambda) = \left(\sqrt{2}x\right)^{\frac{\lambda-1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1 + O\left(x^{-2}\right)\right), \quad x \to \infty.$$

Спектр задачи (4)-(2) состоит из простых собственных значений $\hat{\lambda}_n = 4n+3$, $n = 0, 1, ...$, являющихся нулями функции $f_0(0,\lambda)$. Имеют место равенства

$$f_0\left(x,\hat{\lambda}_n\right) = D_{2n+1}\left(\sqrt{2}x\right) = 2^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}e^{-\frac{x^2}{2}}H_{2n+1}(x),$$

где $H_n(x)$ –многочлен Эрмита. Из известных свойств многочленов Эрмита вытекает, что

$$\hat{\alpha}_n^2 = \int_0^\infty \left|f_0\left(x,\hat{\lambda}_n\right)\right|^2 dx = (2n+1)!\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{5}$$

При этом система функций $\left\{\frac{f_0\left(x,\hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n}\right\}_{n=0}^\infty$ служит ортонормированным базисом в пространстве $L_2(0,\infty)$, т.е. имеет место равенство

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{f_0\left(x,\hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n}\frac{f_0\left(y,\hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n} = \delta(x-y),$$

где δ–дельта функция Дирака.

Вводим теперь решение $f(x,\lambda)$возмущенного уравнения (1) с асимптотикой $f(x,\lambda) = f_0(x,\lambda)(1+o(1))$, $x \to \infty$. Как показано в работе [8], при условии $\sigma_1(0) < \infty$ такое решение существует и допускает следующее представление с помощью оператора преобразования:

$$f(x,\lambda)=f_0(x,\lambda)+\int_x^{\infty}K(x,t)\;\;f_0(t,\lambda)\,dt, \tag{6}$$

где ядро $K(x,t)$ является непрерывной функцией и удовлетворяет следующему соотношению

$$|K(x,t)|\le C\frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right), \tag{7}$$

где через C здесь и далее обозначаются, вообще говоря, различные постоянные.

При выполнении условий (3) задача (1)-(2) имеет чисто дискретный спектр, состоящий (см., напр., [7]) из простых собственных значений $\lambda_n, n=0,1,...,$ где $\lambda_n\to+\infty$ при $n\to\infty$. Кроме того, спектр задачи (1)-(2) совпадает с множеством нулей функции $f(0,\lambda)$ и справедливо асимптотическое равенство

$$\lambda_n=\hat{\lambda}_n+O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right), n\to\infty.$$

Хорошо известно, что (см. $[5],[9],[10]$) при реализации формализма интегральных уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко важную роль играют свойства функции вида

$$F(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{f_0(x,\lambda_n)\,f_0(y,\lambda_n)}{\alpha_n^2}-\frac{f_0\left(x,\hat{\lambda}_n\right)f_0\left(y,\hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n^2}\right\}. \tag{8}$$

В настоящей работе доказано, что ряд (8) ограниченно сходится, т.е. сходится в каждой точке (x,y) к пределу $F(x,y)$, оставаясь ограниченным в каждой конечной области (x,y)- плоскости.

Теорема. *Последовательность функций*

$$F_N(x,y)=\sum_{n=0}^{N}\frac{f_0(x,\lambda_n)\,f_0(y,\lambda_n)}{\alpha_n^2}-\sum_{n=0}^{N}\frac{f_0\left(x,\hat{\lambda}_n\right)f_0\left(y,\hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n^2}$$

ограниченно сходится.

2. Доказательство теоремы

Обозначим через $\varphi(x,\lambda;q)$ решение уравнения (1) с начальными условиями $\varphi(0,\lambda;q)=0,\ \varphi'(0,\lambda;q)=1$. Положим

$$\begin{array}{l}\theta(x,y,\mu;q)=\int_0^{\mu}\varphi(x,\lambda;q)\,\varphi(y,\lambda;q)\,d\rho(\lambda;q)\,,\\ \theta_0(x,y,\mu)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\mu}\sin\lambda x\sin\lambda y d\lambda,\end{array}$$

где $\rho(\lambda;q)$- спектральная функция $([10],[11])$ задачи (1)-(2). Как показано в $[10],[11]$, разность $\theta(x,y,\mu;q)-\theta_0(x,y,\mu)$ ограниченно сходится при $\mu\to\infty$. С другой стороны, так как спектр задачи (1)-(2) дискретен, то справедлива формула

$$\rho(\lambda;q)=\sum_{\lambda_n<\lambda}\beta_n^{-2}(q)\,,$$

где $\beta_n^2(q) = \int_0^\infty \varphi^2(x,\lambda_n;q)\,dx$, $\beta_n^2(0) = \int_0^\infty \varphi^2\left(x,\hat{\lambda}_n;0\right)dx$. Принимая во внимание, что $\varphi(x,\lambda_n;q) = \frac{f(x,\lambda_n)}{f'(0,\lambda_n)}$, $\varphi(x,\lambda_n;0) = \frac{f_0\left(x,\hat{\lambda}_n\right)}{f_0'\left(0,\hat{\lambda}_n\right)}$, окончательно получим

$$\theta(x,y,\mu;q) = \sum_{\lambda_n<\mu} \frac{f(x,\lambda_n)\,f(y,\lambda_n)}{\alpha_n^2},$$

$$\theta(x,y,\mu;0) = \sum_{\hat{\lambda}_n<\mu} \frac{f_0\left(x,\hat{\lambda}_n\right)f_0\left(y,\hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n^2}.$$

Следовательно, последовательность функций

$$\Phi_N(x,y) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f(x,\lambda_n)\,f(y,\lambda_n)}{\alpha_n^2} - \sum_{n=0}^{N} \frac{f_0\left(x,\hat{\lambda}_n\right)f_0\left(y,\hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n^2} \tag{9}$$

ограниченно сходится.

Из известных свойств операторов преобразования (см. например,[12]) и из (6) вытекает, что

$$f_0(x,\lambda) = f(x,\lambda) + \int_x^\infty \hat{K}(x,t)f(t,\lambda)dt, \tag{10}$$

где ядро $\hat{K}(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{K}(x,y) + K(x,y) + \int_x^y \hat{K}(x,t)\,K(t,y)\,dt = 0. \tag{11}$$

Из последнего уравнения и (7) вытекает, что

$$\left|\hat{K}(x,y)\right| \le C\sigma_0\left(\frac{x+y}{2}\right). \tag{12}$$

Более того, пользуясь оценками (2.13) из работы [8] легко проверить, что при выполнении условий (3) ядро $K(x,y)$ представления (7) непрерывно дифференцируемо и верна оценка

$$\left|\frac{\partial K(x,y)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial K(x,y)}{\partial y}\right| \le C\sigma_3\left(\frac{x+y}{2}\right). \tag{13}$$

Из (11) следует, что аналогичному неравенству удовлетворяет и ядро $\hat{K}(x,y)$. Отсюда и из (12), (13) находим, что ядро $\hat{K}(x,y)$ удовлетворяет оценке

$$\int_x^\infty \left[\left|\hat{K}_y'(x,y)\right|^2 + y^2\left|\hat{K}(x,y)\right|^2\right]dy < \infty.$$

Тогда при каждом $x \ge 0$ коэффициент

$$c_n = \left(\int_x^\infty \hat{K}(x,t)\,\frac{f_0\left(t,\hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n}dt\right) \tag{14}$$

удовлетворяет[1] неравенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{\lambda}_n \left|c_n\right|^2 < \infty. \tag{15}$$

Далее, воспользовавшись формулой (5) а также известными [6] , [7]асимптотическими формулами

$$\Gamma\left(az+b\right) \sim \sqrt{2\pi} e^{-az} \left(az\right)^{az+b-\frac{1}{2}},$$

$$f_0\left(x,\lambda\right) = \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{\frac{\lambda-1}{4}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{4}\right) \left\{\cos\left[\pi\frac{\lambda-1}{4} - \sqrt{\lambda}x\right] + \lambda^{-\frac{1}{2}}\left(2x^3 + 2^{-\frac{1}{2}}\right) O\left(1\right)\right\},$$

найдем, что существует постоянная C, такая, что при больших значениях n равномерно относительно x, взятых из каждого конечного отрезка $[0,b]$, имеет место оценка

$$\left|\frac{f_0\left(x,\hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n}\right| \leq \frac{C}{n^{\frac{1}{4}}}. \tag{16}$$

Запишем теперь формулу (10) в виде

$$f_0\left(y,\lambda\right) = \left(I_y + \hat{K}_y\right) f\left(y,\lambda\right).$$

Применив к равенству (9) оператор $\left(I_x + \hat{K}_x\right)\left(I_y + \hat{K}_y\right)$, получим

$$\begin{aligned}
&\left(I_x + \hat{K}_x\right)\left(I_y + \hat{K}_y\right) \Phi_N\left(x,y\right) = \textstyle\sum_{n=0}^{N} \frac{f_0(x,\lambda_n) f_0(y,\lambda_n)}{\alpha_n^2} - \\
&- \textstyle\sum_{n=0}^{N} \left(I_x + \hat{K}_x\right)\left(I_y + \hat{K}_y\right) \frac{f_0\left(x,\hat{\lambda}_n\right) f_0\left(y,\hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n^2} = \\
&= F_N\left(x,y\right) - \textstyle\sum_{n=0}^{N} \left(\int_x^{\infty} \hat{K}\left(x,t\right) \frac{f_0\left(t,\hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n} dt\right) \frac{f_0\left(y,\hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n} - \\
&- \textstyle\sum_{n=0}^{N} \left(\int_y^{\infty} \hat{K}\left(y,t\right) \frac{f_0\left(t,\hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n} dt\right) \frac{f_0\left(x,\hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n} - \\
&- \textstyle\sum_{n=0}^{N} \left(\int_x^{\infty} \hat{K}\left(x,t\right) \frac{f_0\left(t,\hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n} dt\right) \left(\int_y^{\infty} \hat{K}\left(y,t\right) \frac{f_0\left(t,\hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n} dt\right).
\end{aligned} \tag{17}$$

Левая часть тождества (17) ограниченно сходится. Поэтому это верно и для правой части. Но, в силу (14)- (16) второе, третье и четвертое слагаемые ограниченно сходятся. Поэтому первое слагаемое справа в (17), т.е. последовательность функций $F_N\left(x,y\right)$ ограниченно сходится, что и требовалось доказать.

Список литературы

[1] Ф.А. Березин, М.А.Шубин. Уравнение Шредингера. М.:, 1983.

[2] H.P. McKean, E. Trubowitz. The spectral class of the quantum-mechanical harmonic oscillator. Comm. Math. Phys. 82: 471-495, 1982.

[3] D.Chelkak , P.Kargaev, E. Korotyaev. Inverse Problem for Harmonic Oscillator Perturbed by Potential, Characterization. Comm. Math. Phys. 249(4): 133–196, 2004.

[4] D.Chelkak, E.Korotyaev. The inverse problem for perturbed harmonic oscillator on the half-line with Dirichlet boundary condition. Ann. Henri Poincare. 8(6): 1115–1150, 2007.

[5] Б.М. Левитан. Об операторах Штурма-Лиувилля на всей прямой с одинаковым дискретным спектром. Матем. Сборник. **132**(1): 73-103, 1987.

[6] М. Абрамович, И. Стиган. *Справочник по специальным функциям,* М.: Наука, 1979.

[7] L.A. Sakhnovich. Asymptotic behavior of the spectrum of an anharmonic oscillator. Theoretical and Mathematical Physics. 47(2): 449-456, 1981.

[8] Г. М. Масмалиев, А. Х. Ханмамедов. Операторы преобразования для возмущенного гармонического осциллятора. Матем. Заметки. 105(5): 740–746, 2019.

[9] G. Freiling and V. Yurko. Inverse Sturm-Liouville Problems and Their Applications. New York, Nova Science Publishers Inc , 2001.

[10] Б. М. Левитан. Об асимптотическом поведении спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка и о разложении по собственным функциям. Известия Академии Наук СССР, Серия математическая. 17: 331—364, 1953.

[11] Б. М. Левитан. Об асимптотическом поведении спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка и о разложении по собственным функциям. II. Известия Академии Наук СССР, Серия математическая.19: 33—58, 1955.

[12] В.А.Марченко. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Наук. Думка, Киев, 1977.

А.Х.Ханмамедов
Бакинский государственный университет, AZ 1148,Баку, Азербайджан,
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана, AZ 1141,Баку,
Университет Азербайджан, AZ 1007,Баку
E-mail: agil_khanmamedov@yahoo.com

Г.М.Масмалиев
Бакинский государственный университет, AZ 1148,Баку, Азербайджан,

Н.Ф.Гафарова
Университет Азербайджан, AZ 1007,Баку
E-mail: nigar-64@mail.ru

Received 10 May 2019
Accepted 05 March 2020