

## Об оценках типа Вимана-Валирона для решения задачи Коши

Д.Е. Фараджли

---

**Аннотация.** В данной статье устанавливаются оценки типа Вимана-Валирона для решений Коши для дифференциального операторного уравнения в гильбертовом пространстве. При определенных условиях на символы псевдодифференциальных операторов получаем оценки решения характеризующие поведение решения при  $t \rightarrow 0$ .

**Ключевые слова:** Целые функции, вероятность, случайная величина, максимум модуля, максимальный член ряда, оценка типа Вимана-Валирона, функция распределения, дифференциальный оператор, исключительное множество, преобразование Фурье.

**2010 Mathematics Subject Classifications:** 34K08, 34K10

---

### 1. Введение

Пусть  $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$ -целая функция,

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad \mu(r) = \max_n |a_n| r^n$$

-максимум модуля и максимальный член функции  $f(z)$  в круге  $|z| \leq r$ . По известному результату Вимана [1] и Валирона [2] справедлива следующая оценка

$$M(r) \leq c\mu(r) (\log \mu(r))^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \quad (1)$$

Причем она может нарушаться только на множестве конечной логарифмической меры. Имеется обширная теория Вимана-Валирона в области степенных рядов, рядов Дирихле, многомерных целых функций и др.

В 1963 г. американский математик Розенблум [3] получил более общий и точный результат об оценке  $M(r)$  сверху через  $\mu(r)$ . Для некоторого класса растущих функций  $\varphi(y) > 0$  он установил следующую оценку

$$M(r) \leq c\mu(r) \sqrt{\varphi(\log M(r))}. \quad (2)$$

(вне некоторого множества  $E \subset (0, \infty)$  конечной логарифмической меры). В работах Н.М. Сулейманова (см. [4]) впервые были установлены аналогичные оценки для решений дифференциальных операторных уравнений вида

$$u'(t) \pm A(t)u(t) = 0, \quad (3)$$

где  $A(t)$ -положительный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве  $H$  с чисто дискретным спектром, в которых роль функций  $M(r)$  и  $\mu(r)$  в (2) играют соответственно функции  $M(t) = \|u(t)\|$  и  $\mu(t) = \max_k |(u(t), \varphi_k(t))|$ , где  $\{\varphi_k(t)\}$  есть ортонормированная система собственных функций оператора  $A(t)$  в (3).

Для получения таких оценок типа Вимана-Валирона был построен специальный метод, основанный на вероятности, позволяющий найти такую растущую функцию  $\psi(y) > 0$ , что выполняется оценка типа

$$\|u(t)\| \leq \psi(\mu(t)), \quad \mu(t) \rightarrow \infty \quad (4)$$

при  $t \rightarrow 0$ . Такие оценки мы называем оценками типа Вимана-Валирона. При этом существенно наличие асимптотических формул с оценками остатка для функции распределения  $N(\lambda)$  собственных значений оператора  $A(t)$  в уравнении (3).

## 2. Постановка задачи

В данной статье ставится задача об установлении оценки типа Вимана-Валирона для решений задачи Коши для параболических операторных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + A(t, D_x)u(t, x) = 0, \quad (5)$$

в силе  $(0, T) \times R^n$ ,

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in R^n, \quad (6)$$

где  $A(t, D_x)$ - (псевдо) дифференциальный оператор в  $R^n$  с символом  $A(t, \xi)$ ,  $ReA(t, \xi) > 0$ ,  $u_0(x)$  обобщенная функция (в частности,  $u_0(x) = \delta(x)$ -функция Дирака),  $D_x = \frac{1}{i}grad_x$ .

Сразу отметим, что методы построения для исследования оценок типа Вимана-Валирона для краевых задач для уравнений вида (3) с оператором  $A(t)$  с дискретным спектром для задачи Коши не проходят. Здесь приходится конструировать новый метод, основанный на непрерывных распределениях случайных величин. Такой метод был построен в работах Н.М. Сулейманов (см. [4], стр. 121).

## 3. Основные результаты

После применения преобразования Фурье из (5)-(6) получим двойственную задачу вида

$$\frac{\partial \tilde{u}(t, \xi)}{\partial t} + \tilde{A}(t, \xi) \tilde{u}(t, \xi) = 0, \quad (7)$$

$$\tilde{u}(0, \xi) = \tilde{u}_0(\xi). \quad (8)$$

Решение исходной задачи запишется в виде

$$u(t, x) = F^{-1} \left[ e^{-\int_0^t \operatorname{Re} \tilde{A}(\tau, \xi) d\tau} \tilde{u}_0(\xi) \right],$$

где  $F^{-1}$ -обратное преобразование Фурье. Имеем равенство:

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \int e^{-2 \int_0^t \operatorname{Re} \tilde{A}(\tau, \xi) d\tau} |\tilde{u}_0(\xi)|^2 d\xi.$$

(Для простоты в дальнейшем будем считать  $A(t, \xi)$ -вещественной функцией).

Обозначим:

$$g(t) = \frac{1}{2} \log(u(t, x), u(t, x)),$$

$$l(t, \xi) = \int_0^t \tilde{A}(\tau, \xi) d\tau, \quad d\mu(\xi) = |\tilde{u}_0(\xi)|^2 d\xi,$$

$$m_\sigma = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \tilde{A}(\tau, \xi) > \sigma \right\}.$$

Введем семейство случайных величин  $X$  с непрерывным распределением (зависящим от параметра  $t$ ):

$$P(X \in m_\sigma) = \int_{m_\sigma} \exp(-2l(t, \xi)) d\mu(\xi) / \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2l(t, \xi)) d\mu(\xi).$$

Вычислив  $g'(t)$ ,  $g''(t)$ , математическое ожидание  $MX$ , дисперсию  $DX$  и применить неравенство Чебышева находим (значениями  $X$  являются числа  $x = \tilde{A}(t, \xi)$ ):

$$MX = -g'(t), \quad 2DX \leq g''(t) - k(t)g'(t), \quad g'(t) \leq 0.$$

Следующая Лемма доказана в книге Сулейманова ([4], стр. 121):

**Лемма 7.1** Справедливо неравенство

$$e^{2g(t)} \leq c\mu(t)^2 S(t, g', g''), \quad (9)$$

где

$$S(t, a, b) = \operatorname{mes}_\xi \left\{ \xi : \left| \tilde{A}(t, \xi) - a \right| \leq c\sqrt{b + k(t)a} \right\}, \quad (10)$$

$$\mu(t)^2 = \operatorname{ess\,sup}_{\xi} \left( e^{-2l(t,\xi)} |\tilde{u}_0(\xi)|^2 \right). \quad (11)$$

Основной результат статьи содержится в следующей теореме:

**Теорема.** Пусть  $\varphi(y)$ -положительная непрерывная возрастающая функция такая, что

$$\int_1^{\infty} \left( \int_1^y \varphi(t) dt \right)^{-\frac{1}{2(s+1)}} dy < \infty, \quad s \geq 0. \quad (12)$$

Пусть при  $\lambda > \delta > 0$ ,  $\lambda \rightarrow +\infty$  выполнено условие вида

$$\operatorname{mes}_n \left\{ \xi \in R^n \mid \operatorname{Re} \tilde{A}(t, \xi) - \lambda \mid < \delta \right\} \leq c\delta\lambda^s(1 + \lambda^v), \quad 0 < v < 1.$$

Пусть еще при почти всех  $t$  выполнено условие

$$\frac{\partial}{\partial t} A(t, \xi) \leq K(t)A(t, \xi), \quad 0 \leq K(t) \in L_1(0, T).$$

Тогда вне множества конечной логарифмической меры для решения  $u(t, x)$  задачи Коши (5)-(6) справедлива следующая оценка типа Вимана-Валирона-Розенблюма:

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(R^n)} \leq c\mu(t) \cdot t^{-\gamma} \sqrt[4]{\varphi \left( t^{-\beta} \log \|u(t, \cdot)\|_{L^2(R^n)} \right)}, \quad (13)$$

где  $0 < \beta < 1$ ,  $\gamma > 0$ -определяется через  $s$ ,  $\mu(t)$  определяется формулой (11).

**Доказательство.** Отметим, что условию (12) удовлетворяют функций

$$\varphi(y) = y^{2s+1+\varepsilon}$$

или  $\varphi(y) = y^{2s+1}(\log y)^{2(s+1)}(\log \log y)^{2(s+1)} \dots (\log_n y)^{2(s+1)+\varepsilon}$ .

Введем новые функции, полагая:

$$\xi(t) = \int_0^t e^{\int_0^y k(\tau) d\tau} dy,$$

$$\tilde{h}(\xi) = h(t(\xi)),$$

где  $t(\xi)$  обратная функция к  $\xi(t)$ . Получим:

$$g' = \exp \left\{ \int_0^t k(\tau) d\tau \right\} \tilde{g}'(\xi), \quad (14)$$

$$g'' - k(t)g' = \exp \left\{ 2 \int_0^t k(\tau) d\tau \right\} \tilde{g}''(\xi), \quad (15)$$

Определим  $\lambda(t)$  и  $\delta(t)$  следующим образом:

$$\lambda(t) = |g'(t)| - \frac{1}{2} \sqrt{g'' + k(t) |g'(t)|} = \exp \left( \int_0^t k(\tau) d\tau \right) \left[ \tilde{g}'(\xi) - \frac{1}{2} \sqrt{\tilde{g}''(\xi)} \right],$$

$$\delta(t) = \sqrt{g''(t) - k(t) |g'(t)|} \subset \exp \left\{ \int_0^t k(\tau) d\tau \right\} \sqrt{\tilde{g}''(\xi)}.$$

Рассмотрим два случая:

1)  $2|g'(\xi)| > 3\sqrt{\tilde{g}''(\xi)},$

2)  $2|g'(\xi)| \leq 3\sqrt{\tilde{g}''(\xi)}.$

В случае 1) имеем:  $\lambda(t) > \delta(t) > 0$  и

$$mes_n \left\{ \xi : \left| \tilde{A}(t, \xi) - \lambda(t) \right| < \delta(t) \right\} \leq c \sqrt{g''(\xi)} \cdot |\tilde{g}'(\xi)|^s.$$

В случае 2) получим:

$$mes_n \left\{ \xi \in R^n : \left| \tilde{A}(t, \xi) - \lambda(t) \right| < \delta(t) \right\} \leq c [g''(\xi)]^{\frac{s+1}{2}}.$$

В результате (учитывая условие (10)) мы получаем неравенство (вне множества конечной логарифмической меры):

$$mes_n \left\{ \xi \in R^n : \left| \tilde{A}(t, \xi) - g'(t) \right| < c \sqrt{g''(\xi) - k(t) |g'(t)|} \right\} =$$

$$= S(t, g', g'') \leq t^{-\gamma} \sqrt{\varphi(t^{-\beta} g(t))}.$$

Отсюда, в силу ключевой Леммы, имеем

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(R^n)}^2 \leq c \mu^2(t) t^{-\gamma} \sqrt{\varphi(t^{-\beta} \log \|u(t, \cdot)\|)}, \quad (16)$$

где  $\gamma = [2s(1 - \beta) + 2 - \beta] 4$ .

В частности, при  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $\gamma = \frac{2s+3}{8}$ ,  $\varphi(y) = y^{2s+1+\varepsilon}$ , из (16) получим:

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(R^n)} \leq \tilde{\mu}(t) [\log \tilde{\mu}(t)]^\gamma, \quad \gamma = \frac{2s+1}{4} + \varepsilon.$$

**Пример.** Рассмотрим фундаментальное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u(t, x) = \frac{\theta(t)}{(2\sqrt{\pi t})^n} \exp \left( -\frac{|x|^2}{4t} \right), \quad x \in R^n,$$

где  $\theta(t)$ -функция Хевисайда,  $A(t, D_x) = -\Delta$ -оператор Лапласа,  $u_0(x) = \delta(x)$  функция Дирака,  $\tilde{u}_0(\xi) = 1$ ,  $\tilde{A}(t, \xi) = |\xi|^2$ ,  $l(t, \xi) = t|\xi|^2$ . Следовательно, имеем:

$$\mu^2(t) = \sup_{\xi} \left( e^{-2l(t,\xi)} |u_0(\xi)|^2 \right) = 1.$$

Тогда из общей оценки (11) получим

$$\|u(t, \cdot)\| \leq \frac{c}{t^{\frac{n}{4}+\varepsilon}}, \quad t \rightarrow +0.$$

Если рассмотреть задачу Коши для уравнения вида

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + (-\Delta_x)^{\frac{\sigma}{2}} u(t, x) = 0, \quad \sigma > 0,$$

то получим:  $A(t, \xi) = |\xi|^\sigma$ ,  $s = \frac{n}{\sigma} - 1$ ,

$$\mu(t) = \sup_{\xi} \left( e^{-t|\xi|^\sigma} |\tilde{u}_0(\xi)| \right).$$

Тогда, вне множества конечной логарифмической меры для решения этой задачи Коши справедлива оценка вида:

$$\|u(t, \cdot)\| \leq \tilde{\mu}(t) (\log \tilde{\mu}(t))^\gamma,$$

где  $\tilde{\mu}(t) = t^{-\frac{n}{2\sigma}+\varepsilon} \mu(t)$ .

### Список литературы

- [1] Wiman A. // Acta Math. 1916, v. 41, p. 1-58.
- [2] Валирон Ж. Аналитические функции. М., 1957, -235 с.
- [3] Rosenbloom P.C. Probability and entire functions // Studies in Mth. Anal. and related Topics. California: Stanford. Univ. Press, 1963, p. 325-332.
- [4] Сулейманов Н.М. Вероятность, целые функции и оценки типа Вимана-Валирона для эволюционных уравнений. Издательство Московского университета.
- [5] Теоремы типа Вимана-Валирона для параболических уравнений в гильбертовом пространстве // Мат. сб. 1981. - Т. 115 (157), No 5. -С. 74-97.
- [6] О поведении решений задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений в неограниченных областях // ДАН СССР. 1978. -Т. 239, No 4. -С. 429-432.
- [7] Теоремы типа Вимана-Валирона для обратно-параболических уравнений в гильбертовом пространстве // Дифференц. уравнения. 1980. -Т. 16, No 10, -С.1816-1825.
- [8] Об оценках типа Вимана-Валирона для эволюционных уравнений. Журнал "Дифференциальные уравнения 2017. -Т. 53, No 8, -С. 1090-1097.

- [9] Suleymanov N.M., Farajli D.E., Vugar S.Khalilov. "Probability method and Wiman-Valiron type estimates for differential equations". Transactions of NAS of Azerbaijan, 37 (4), 168-175, (2017).
- [10] Suleymanov N.M., Farajli D.E. On Wiman-Valiron type estimations for evolution equations. Caspian journal of applied mathematics, ecology and economics, 2017, vol. 5, No 2, p. 86-93.
- [11] Сулейманов Н.М., Фараджли Д.Е. Об оценках типа Вимана-Валирона для степенных рядов с конечным радиусом сходимости. 2018, -Т. 8, No 1, -С. 62-68.
- [12] Сулейманов Н.М., Фараджли Д.Е. Об оценках типа Вимана-Валирона для эволюционных уравнений. Международная конференция "Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXIX посвященная 90-летию В.А.Ильина. 2-6 май, 2018, -216 с.

Д.Е. Фараджли

*Институт математики и механики, Аз1141, Баку, Азербайджан*

*E-mail: dunya.farajli@mail.ru*

Received 23 June 2018

Accepted 20 May 2019