Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 9, No 2, 2019, December
ISSN 2222-5498

Спектральное разложение по собственным функциям одного дифференциального пучка 4-го порядка с трехкратным характеристическим корнем

С.А. Алиев

Аннотация. В пространстве $L_2(0,\infty)$ рассмотрен пучок дифференциальных операторов 4-го порядка, когда главный характеристический полином имеет корень i (мнимая единица) с кратностью три и простой корень $(-i)$ с нормированными краевыми условиями в нуле, число условий которых, зависит от местоположения спектрального параметра λ в комплексной плоскости. На коэффициенты дифференциального выражения наложены такие условия, которые обеспечивают существования оператора преобразования, переводящее решения рассматриваемого уравнения в решения уравнения, содержащее только главные члены. Доказано, что если пучок имеет конечное число невещественных собственных значений и не имеет спектральных особенностей, тогда для гладкой до 7-го порядка функции $f(x)$, являющаяся финитной в окресности нуля и бесконечности, имеет место равномерно сходящаяся для всех $x\in[0,\infty)$ формула спектрального разложения по собственным функциям дискретного спектра и по главным функциям непрерывного спектра. Результаты обобщены и на случай, когда имеются конечное число спектральных особенностей.

Ключевые слова: спектр, спектральное разложение, резольвента, сопряженный оператор
2010 Mathematics Subject Classifications: 34B27, 47E05

В пространстве $L_2(0,\infty)$ рассмотрим пучок дифференциальных операторов L_λ^α, порожденный дифференциальным уравнением

$$l\left(x,\frac{d}{dx},\lambda\right)y\equiv\left(\frac{d}{dx}-i\lambda\right)^3\left(\frac{d}{dx}+i\lambda\right)y+r(x)\frac{dy}{dx}+\left(\lambda p(x)+q(x)\right)y=0, \qquad (1)$$

и граничными условиями

$$U_v(y)=\alpha_{v0}y(0,\lambda)+d_{v1}y'(0,\lambda)+\alpha_{v2}y''(0,\lambda)+\alpha_{v3}y'''(0,\lambda)=0,\quad v=\overline{1,3} \qquad (2)$$

где λ-спектральный параметр, $r(x),p(x),q(x)$-комплекснозначные функции, определенные и непрерывные на полуотрезке $[0,\infty)$, соответственно, имеющие непрерывные производные до порядка 3,4,5 включительно, а также сходятся интегралы

$$\int\limits_0^\infty x^4\left|r^{(s)}(x)\right|dx<\infty,\ s=\overline{0,3};\ \int\limits_0^\infty x^4\left|p^{(s)}(x)\right|dx<\infty,\ s=\overline{0,5};$$

$$\int\limits_0^\infty x^4 \left| q^{(s)}(x) \right| dx < \infty, \ \ s = \overline{0,4}; \tag{3}$$

α_{vk} фиксированные комплексные числа такие, что формы $U_v(y)$ линейно независимы, а число граничных условий меняется в зависимости от местонахождения параметра λ в комплексной плоскости, здесь $v = \overline{1,3}, \quad k = 0,3$.

Различные вопросы в аспекте прямого спеткрального анализа и обратных задач, связанные с теорией обыкновенных дифференциальных пучков, заданных на конечных интервалах [2-6,10,15,17] и бесконечных интервалах [1,2,8,9,11-14,16,18,19], как в случае простых корней [3,4,8,9,12,17], так и случаях кратных корней [1,2,6-9,13-16,18] главного характеристического полинома, с коэффициентами, удовлетворяющими определенным условиям алгебраических соотношений [6,8,10], с условиями интегрируемости [13,14,16,19], а также с периодическими и почти периодическими коэффициентами и их малыми возмущениями [5,8,12,18], интенсивно изучались впоследствии вплоть до настоящего вреемени. В результате создана определенная спектральная теория регулярных и сингулярных дифференциальных пучков только в случае простых корней главного характеристического многочлена.

Пока не создана вполне определенная спектральная теория сингулярных пучков с кратными характеристическими корнями. Изучение спектрального разложения по элементам решений сингулярных спектральных задач с кратными характеристиками представляет особый по трудности и малоизученный раздел, относящийся к обобщенной теории рядов разложения по собственным функциям дискретного спектра и по главным функциям непрерывного спеткра. В частных случаях двукратных корней главного характеристического полинома получены формулы кратного спеткрального разложения в работах [13,14].

Настоящая работа является продолжением исследований [16,19], где исследовано уравнение (1) и построены операторы преобразования, переводящее решения уравнения $\left(\frac{d}{dx} - i\lambda\right)^3 \left(\frac{d}{dx} + i\lambda\right) y = 0$ в решения урвнения (1). В частности, в [16] доказано, что уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений $y_j(x,\lambda), \quad j = \overline{1,4}$, которые удовлетворяют условиям

$$\lim_{x\to\infty} \left[y_j(x,\lambda) - x^{j-1} e^{i\lambda x} \right] = 0, \quad j = \overline{1,3}, \quad Im\lambda \geq 0;$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[y_j(x,\lambda) - e^{-i\lambda x} \right] = 0, \quad Im\lambda \leq 0. \tag{4}$$

Там же, доказано, что существуют ядра $K_j^{\pm}(x,t)$, такие, что

$$\begin{aligned} y_j(x,\lambda) &= x^{j-1} e^{i\lambda x} + \int\limits_x^\infty K_j^{\pm}(x,t) e^{i\lambda t} dt, \quad Im\lambda \geq 0 \\ y_4(x,\lambda) &= e^{-i\lambda x} + \int\limits_x^\infty K_4^{-}(x,t) e^{-i\lambda t} dt, \quad Im\lambda \leq 0, \end{aligned} \tag{5}$$

При этом $K_j^{\pm}(x,t), \quad j=\overline{1,4}$ удовлетворяют уравнениям

$$l\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, \pm i\frac{\partial}{\partial t}\right) K_j^{\pm}(x,t) = 0 \tag{6}$$

и имеют место

$$\lim_{x+t\to\infty} \frac{\partial^{\alpha+\beta} K_j^{\pm}(x,t)}{\partial x^{\alpha}\partial t^{\beta}} = 0, \quad \alpha+\beta \le 4, \quad \int_x^{\infty} \left|K_j^{\pm}(x,t)\right|^2 dt < \infty, \tag{7}$$

А в работе [19] показано, что пучок L_λ^α может иметь в открытой нижней и открытой верхней полуплоскостях конечное или счетное число собственных значений, а непрерывный спектр заполняет всю действительную ось, где могут находится спектральные особенности. Там же, доказано, что резольвента пучка является ограниченным интегральным оператором, определенным на всем пространстве $L_2(0,\infty)$, с ядром типа Карлемана.

Здесь мы в существенном следуем тому же содержательному подходу, что и в [11], где изучен вопрос спектрального разложения, когда имеются две различные характеристичекие корни с одинаковой кратности для дифференциального пучка 4-го порядка, но аналитические вопросы, связанные с нарушанием симметричности расположения характеристических корней на лучах, исходящих из начала координат, сейчас требуют значительно большего внимания.

Обозначим через D совокупности всех функций $y(x,\lambda) \in L_2(0,\infty)$ таких, что:

1) производные $y^{\nu}(x,\lambda), \ \nu=\overline{0,3}$ существуют, абсолютно непрерывны в каждом конечном интервале $[0,b], \quad b>0$, при каждом $\lambda : \pm Im\lambda \ge 0$;

2) $l\left(x, \frac{d}{dx}, \lambda\right) y \in L_2(0,\infty)$. Далее, черех D_α обозначим совокупность тех функций из D, для которых выполняется условие (2). Определим L_λ^α так: область определения есть D_α и $L_\lambda^\alpha = l\left(x, \frac{d}{dx}, \lambda\right) y$ при $y \in D$.

Пусть теперь $L^*\left(x, \frac{d}{dx}, \lambda\right) z$-сопряженное к $l\left(x, \frac{d}{dx}, \lambda\right) y$ дифференциальное выражение. Обозанчим через D^* совокупность функций $z(x,\lambda) \in L_2(0,\infty)$, такх, что:

1) производные $z^{(\nu)}(x,\lambda), \ \nu=\overline{0,3}$ существуют и абсолютно непрерывны в каждом конечном интервале $[0,b], b>0$, при каждом $\lambda : \pm Im\lambda \ge 0$;

2) $l^*\left(x, \frac{d}{dx}, \lambda\right) z \in L_2(0,\infty)$.

Поскольку имеет место формула Лагранжа

$$\int_0^{\infty} l\left(x, \frac{d}{dx}, \lambda\right) y(x,\lambda)\cdot \overline{z}(x,\lambda)dx = P(\xi,\eta)\mid_0^{\infty} + \int_0^{\infty} y(x,\lambda)\overline{l^*\left(x\frac{d}{dx}, \lambda\right) z(x,\lambda)}dx,$$

где $P(\xi,\eta)$-билинейная форма относительно переменных

$$\xi = \left(y(0), y'(0), y''(0), y'''(0), y(\infty), y'(\infty), y''(\infty), y'''(\infty)\right)$$

$$\eta = \left(z(0), z'(0), z''(0), z'''(0), z(\infty), z'(\infty), z''(\infty), z'''(\infty)\right),$$

то для любых функций $y(x,\lambda)\in D,\quad z(x,\lambda)\in D^*$ будем иметь

$$\int\limits_0^\infty \left[l\left(x,\frac{d}{dx},\lambda\right) y(x,\lambda)\cdot \overline{z}(x,\lambda) - y(x,\lambda)\cdot \overline{l^*\left(x\frac{d}{dx},\lambda\right)z}\right] dx = P(\xi,\eta)\,|_0\ ,$$

так как для любой функции $y(x,\lambda)\in D$ имеет место при $x\to\infty$ сходимость к нулю производных $y^{(\nu)}(x,\lambda), \nu=\overline{0,3}$.

Определим теперь сопряженный к L_λ^α оператор $(L_\lambda^\alpha)^*$. Он порождается дифференциальным выражением

$$l_\lambda^*\left(x,\frac{d}{dx},\lambda\right) z = z'^{\nu}(x) - 2i\overline{\lambda}z'''(x) - \left(-2i\overline{\lambda}^3 + \overline{r}(x)\right) z'(x) +$$

$$+\left[\overline{\lambda}\overline{p}(x) + \overline{q}(x) - \overline{r}'(x)\right] z(x) \tag{8}$$

и сопряженными к (2) начальными условиями

$$U_\nu^*(z) = \beta_{\nu 0} z(0,\lambda) + \beta_{\nu i} z'(0,\lambda) + \beta_{\nu 2} z''(0,\lambda) + \beta_{\nu 3} z'''(0,\lambda) = 0,\quad \nu=\overline{1,3}, \tag{9}$$

где коэффициенты $\beta_{\nu k},\ \nu=\overline{1,3},\ k=\overline{0,3}$ выражаются через коэффициенты (2) и $r(0)$. Область определения этого оператора являются функции из D^* удовлетворяющим условиям (9).

Так как сопряженным для уравнения

$$l_\lambda^*\left(x,\frac{d}{dx},\lambda\right) z(x,\lambda) = 0 \tag{10}$$

являются уравнение (1), то в силу симметрии $P(\xi,\eta)\,|_0$, пучок L_λ^α является сопряженной к $(L_\lambda^\alpha)^*$.

В работе [18] выведены следующие формулы для ядра $K^\pm(x,\xi,\lambda)$ резольвенты $R_\lambda^{\pm\alpha}$ в верхней и нижней полуплоскостях:

$$K^\pm(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{3}\left[h_i^+(\xi,\lambda) + \omega_i^+(\xi,\lambda)\right] y_{i-1}^+(x,\lambda),\ \text{при}\ \ \xi<x \\ \sum\limits_{i=1}^{3}\left[h_i^+(\xi,\lambda) y_{i-1}^+(x,\lambda) - \omega_4^+(\xi,\lambda)\right] y_0^-(x,\lambda),\ \text{при}\ \ \xi>x \end{cases} \tag{11}$$

где y_1,y_2,y_3,y_4 из формулы (5) перенумерованы на $y_0^+,y_1^+,y_2^+,y_0^-;\ h_i^+(x,\lambda) = \frac{A_i(\lambda)}{A(\lambda)}\cdot \omega_4^+(\xi,\lambda),\ A(\lambda) = \det\|U_v(y_k)\|_{v,k=1}^3 \neq 0,\ A_i(\lambda)$ определитель, полученный из $A(\lambda)$ заменой $U_v(y_i)$ на $U_v(y_4)$; $\omega_i^+(\xi,\lambda) = z_{5-i}^+(\xi,\lambda),\ i=\overline{1,4},\ z_i^+(x,\lambda),\ i=\overline{1,4}$ являются решениям уравнения (10);

$$K^-(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} \left[h^-(\xi,\lambda) + \omega_1^-(\xi,\lambda)\right] y_0^-(x,\lambda),\ \text{при}\ \ \xi<x \\ h^-(\xi,\lambda) y_0^-(x,\lambda) - \sum\limits_{i=2}^{4} \omega_i^-(\xi,\lambda) y_{i-2}^+(x,\lambda),\ \text{при}\ \ \xi>x \end{cases} \tag{12}$$

где

$$h^{-}(x,\lambda)=\frac{1}{U_v(y_0^-)}\sum_{i=2}^{4}U_v\left(y_{i-2}^{+}\right)\omega_i^{-}(\xi,\lambda),\quad z_{5-i}^{-}(\xi,\lambda)=\omega_i^{-}(\xi,\lambda), i=\overline{1,4}.$$

Аналогичные формулы для ядра резольвента $\left(R_\lambda^{\pm\alpha}\right)^*$ сопряженного пучка $\left(L_\lambda^{\pm\alpha}\right)^*$ можно написать в обоих открытых полуплоскостях $\lambda\ :\ \pm Im\lambda\ >\ 0$. При этом $K^{\pm}(x,\xi,\lambda)=\overline{K^{\pm *}(\xi,x,\overline{\lambda})}$.

Предположим, что пучки L_λ^α и $(L_\lambda^\alpha)^*$ имеют конечное число собственных значений и функции

$$A(\lambda)=\det\left\|U_i(y_k)\right\|_{i,k=1}^{3},\quad B(\lambda)=U_v(y_4)$$

$$A^*(\overline{\lambda})=\det\left\|U_v^{+}(\overline{z}_k)\right\|_{i,k=1}^{3},\quad B^*(\overline{\lambda})=U_v(\overline{z}_1) \tag{13}$$

где ν одно из чисел 1,2,3, на вещественные оси не обращаются в нуль.

Если при нектором $\eta>0$ имеет место

$$\exp(\eta x)\left|r^{(v)}(x)\right|\in L_1(0,\infty),\quad \exp(\eta x)\left|p^{(v)}(x)\right|\in L_1(0,\infty),\ \nu=\overline{0,1};$$

$\exp(\eta x)\left|q(x)\right|\in L_1(0,\infty)$, то пучок может иметь лишь конечное число невещественных собственных значений. Тогда пользуясь формулой (14) из [19] для производных

$$\left(y_j^{\pm}(x,\lambda)\right)^{(k)}, j=\overline{1,4}, k=\overline{1,3}:$$

$$\left(y_j^{\pm}(x,\lambda)\right)^{(k)}=e^{\pm i\lambda x}\sum_{v=0}^{k}(\pm i)^v\lambda^v C_k^v(x^j)^{(k-v)}+$$

$$+e^{\pm i\lambda x}\sum_{\mu=0}^{k}\lambda^\nu g_{\mu,k,j}^{\pm}(x)+\int_x^\infty\frac{\partial^k K_j^{\pm}(x,t)}{\partial x^k}e^{\pm i\lambda t}dt,$$

где

$$g_{kk0}^{\pm}=0,\quad g_{0,1,j}^{\pm}=-K_j^{\pm}(x,x),\quad g_{1,2,j}^{\pm}=\mp K_j^{\pm}(x,x),\quad K_j^{\pm}(x,x)=$$

$$=\pm\frac{1}{8i}\int_x^\infty\xi^j p(\xi)(\xi-x)dx+\frac{1}{8}\int_x^\infty\xi^j r(\xi)\left[i-\xi\right]d\xi,$$

$$\frac{d}{dx}K_j^{\pm}(x,x)=\mp\frac{1}{8i}\int_x^\infty\xi^j p(\xi)d\xi-\frac{1}{8}(i-x)x^j r(x).$$

$$g_{02j}^{\pm}(x)=-\frac{d}{dx}K_j^{\pm}(x,x)-\frac{\partial K_j^{\pm}(x,t)}{\partial x}|_{t=x},$$

$$g_{23j}^{\pm}(x)=\pm i g_{12j}^{\pm}(x),\quad g_{13j}^{\pm}(x)=g_{12j}^{\pm}(x)'\pm i g_{02j}^{\pm}(x)$$

и оценки $\frac{\partial^k K_j^{\pm}(0,t)}{\partial x^k}|_{x=0}$, $k=\overline{0,3}$ из [16] получаем, что $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ являются полиномами определенный степени с комплексными коэффициентами. Аналогичные рассуждения имеет место и для фцнкций $A^*(\overline{\lambda})$, $B^*(\overline{\lambda})$.

Пусть $K_0(x,\xi,\lambda) = K_0^{\pm}(x,\xi,\lambda)$-главная часть ядра резольвента R_λ^α оператора L_λ^α. По формулам (11) и (12) оно соответствует дифференциальному выражению $l\left(x.\frac{d}{d^x},\lambda\right)y$ только со старшими коэффициентами. Функция

$$K(x,\xi,\lambda)=\begin{cases} K^+(x,\xi,\lambda), & + \text{ при } Im\lambda>0 \\ K^-(x,\xi,\lambda), & - \text{ при } Im\lambda<0 \end{cases} \tag{14}$$

удовлетворяет уравнению

$$\delta(x-\xi)=\frac{\partial^4 K(x,\xi,\lambda)}{\partial x^4}-2i\lambda\frac{\partial^3 K(x,\xi,\lambda)}{\partial x^3}+2i\lambda^3\frac{\partial K(x,\xi,\lambda)}{\partial x}-\lambda^4 K(x,\xi,\lambda)+$$

$$+r(x)\frac{\partial K(x,\xi,\lambda)}{\partial x}+\left(\lambda p(x)+q(x)\right)K(x,\xi,\lambda). \tag{15}$$

Функцию $K(x,\xi,\lambda)$ будем искать из уравнения

$$K(x,\xi,\lambda)=K_0(x,\xi,\lambda)+K_1(x,\xi,\lambda) \tag{16}$$

где $K_1(x,\xi,\lambda)$-пока неизвестная функция, функция $K_0(x,\xi,\lambda)$-удовлетворяет уравнению

$$\delta(x-\xi)=\frac{\partial^4 K_0(x,\xi,\lambda)}{\partial x^4}-2i\lambda\frac{\partial^3 K_0(x,\xi,\lambda)}{\partial x^3}+2i\lambda^3\frac{\partial K_0(x,\xi,\lambda)}{\partial x}-\lambda^4 K_0(x,\xi,\lambda). \tag{17}$$

Подставляя (16) в (15) имеем

$$\delta(x-\xi)=\frac{\partial^4 K_1(x,\xi,\lambda)}{\partial x^4}-2i\lambda\frac{\partial^3 K_1(x,\xi,\lambda)}{\partial x^3}+2i\lambda^3\frac{\partial K_1(x,\xi,\lambda)}{\partial x}-\lambda^4 K_1(x,\xi,\lambda)+$$

$$+r(x)\frac{\partial K_1(x,\xi,\lambda)}{\partial x}+\left(\lambda p(x)+q(x)\right)K_1(x,\xi,\lambda)+$$

$$+r(x)\frac{\partial K_0(x,\xi,\lambda)}{\partial x}+\left(\lambda p(x)+q(x)\right)K_0(x,\xi,\lambda).$$

Тогда

$$l\left(x,\frac{d}{dx},\lambda\right)K_1(x,\xi,\lambda)=-\left[r(x)\frac{\partial K_0(x,\xi,\lambda)}{\partial x}+\left(\lambda p(x)+q(x)\right)K_0(x,\xi,\lambda)\right].$$

Отсюда

$$K_1(x,\xi,\lambda)=-L_\lambda^{-1}\left\{r(x)\frac{\partial K_0(x,\xi,\lambda)}{\partial x}+\left(\lambda p(x)+q(x)\right)K_0(x,\xi,\lambda)\right\}=$$

$$= -\int\limits_0^\infty K(x,\xi,\lambda)\left\{r(\eta)\frac{\partial K_0(\eta,\xi,\lambda)}{\partial\eta} + (\lambda P(\eta)+q(\eta))\,K_0(\eta,\xi,\lambda)\right\}d\eta\ .$$

Значения функции $K_1(x,\xi,\lambda)$ подставляя в (16), получим следующее интегральное уравнение относительно $K(x,\xi,\lambda)$:

$$K(x,\xi,\lambda) = \\ = K_0(x,\xi,\lambda) - \int\limits_0^\infty K(x,\eta,\lambda)\left\{r(\eta)\frac{\partial K_0(\eta,\xi,\lambda)}{\partial\eta} + (\lambda p(\eta)+q(\eta))\,K_0(\eta,\xi,\lambda)\right\}d\eta. \tag{18}$$

Вычисляя асимптотические выражения фундаментальных систем решений уравнения $l_\lambda\left(x,\frac{d}{dx},\lambda\right)y=0$ только со старшими коэффициентами, для каждого λ из открытой верхней и нижней полуплоскостях получаем справедливости неравенство

$$\int\limits_0^\infty \left\{r(\eta)\frac{\partial K_0(\eta,\xi,\lambda)}{\partial\eta} + (\lambda p(\eta)+q(\eta))\,K_0(\eta,\xi,\lambda)\right\}d\eta < 1 \tag{19}$$

для всех x из $[a,\infty)$, где a достаточно большое фиксированное число.

Решая интегральное уравнение (18), получим, что ядро $K(x,\xi,\lambda)$ допускает асимптотику при

$$K(x,\xi,\lambda) = K_0(x,\xi,\lambda)\,[1+0(1)]\ . \tag{20}$$

Отсюда непосредственным вычислением по формулам (11), (12) можно получить оценку

$$|K(x,\xi,\lambda)| \le \frac{C(x,\xi)}{|\lambda|},\quad |\lambda|\to\infty, \tag{21}$$

где $C(x,\xi)$ ограниченная экспоненциальная функция относительно x,ξ из $(0,\infty)$.

Предположим, что $f(x)$ гладкая до 7-го порядка финитная функция в окрестности нуля и бесконечности. Три раза интегрированием по частям, находим, что

$$\int\limits_0^\infty K(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi = \frac{f(x)}{\lambda^4} + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right)\ . \tag{22}$$

Положим

$$y^\pm(x,\lambda) = \int\limits_0^\infty K^\pm(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi, \qquad \begin{matrix} + & \text{при} & Im\lambda>0 \\ - & \text{при} & Im\lambda<0. \end{matrix} \tag{23}$$

Возьмем окружности $\Gamma_N=\{\lambda:|\lambda|=N\}$ большого радиуса N с центром в начале координат. Положим $\Gamma_{N,\varepsilon}=\Gamma^+_{N,\varepsilon}+\Gamma^-_{N,\varepsilon}$ (где $\Gamma^-_{N,\varepsilon}$ замкнутый контур в верхней полуплоскости, образованный полуокружностью $\Gamma_{N,}$ и прямой $Im\lambda=+\varepsilon$, а $\Gamma^-_{N,\varepsilon}$ контур, образованный полуокружностью Γ_N, находящийся в нижней полуплоскости и прямой $Im\lambda=-\varepsilon$).

Обозначая через Γ'_N полуокружность полукруга Γ^+_N, можем записать

$$I^+_N = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{\Gamma^+_N} R_\lambda f \; d\lambda = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{\Gamma'_N} R_\lambda f \; d\lambda + \int\limits_{\Gamma^+_N \setminus \Gamma'_N} R_\lambda f \; d\lambda.$$

Если n_1-число собственных значений в верхней полуплоскости, то по теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{\Gamma^+_N} R^+_\lambda f \; d\lambda = \sum_{i=1}^{n_1} Res \left[R^+_\lambda f\right]_{\lambda=\lambda_i} + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{-N}^{N} R^+_\lambda f \; d\lambda \; .$$

Аналогично обозначая через Γ''_N полуокружность полукруга Γ^-_N имеем

$$I^-_N = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{\Gamma''_{N,}} R_\lambda f \; d\lambda + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{\Gamma^-_N \setminus \Gamma''_N} R_\lambda f \; d\lambda$$

и если n_2-число собственных зачений в нижней полуплоскости, то

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{\Gamma''_N} R^-_\lambda f \; d\lambda = \sum_{i=1}^{n_2} Res \left[R^-_\lambda f\right]_{\lambda=\lambda_i} + \frac{1}{2\pi\Gamma\sqrt{-1}} \int\limits_{-N}^{N} R^-_\lambda f \; d\lambda \; .$$

Так как при $N \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{\Gamma_N} y(x,\lambda) \; d\lambda = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{-\infty+io}^{\infty+io} R^+_\lambda f \; d\lambda + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{\infty-io}^{-\infty-io} R^-_\lambda f \; d\lambda,$$

то получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda^3 \left[R^+_{\lambda+io} - R^-_{\lambda-io}\right] f \; d\lambda + \sum_{i=1}^{n_1} Res \left[\lambda^3 R^+_\lambda f\right]_{\lambda=\lambda_i} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n_2} Res \left[\lambda^3 R^-_\lambda f\right]_{\lambda=\lambda_i}, \tag{24}$$

где

$$\left[R^+_{\lambda+io} - R^-_{\lambda-io}\right] f = \int\limits_{0}^{\infty} \left[K^+(x,\xi,\lambda+i0) - K^-(x,\xi,\lambda-i0)\right] f(\xi) d\xi \; .$$

Таким образом, получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Предположим, что пучок L^α_λ имеет конечной число невещественных собственных занчений, и не имеет спектральных особенностей. Тогда для гладкой до*

7-го порядка функции $f(x)$, являющаяся финитной в окрестности нуля и бесконечности, имеет место равномерно сходящаяся для всех $x \in [0, \infty)$ формула разложения (24).

Рассмотрим случай, когда имеются спектральные особенности. Пусть такими являются точки μ_k, $k = \overline{1,r}$. Обозначим через γ_k, $k = \overline{1,r}$ окружности с центрами в точках μ_k, $k = \overline{1,r}$ достаточно малого радиуса, так чтобы эти окружности не пересекались и не охватывали собственных значений. Далее через Γ обозначим те части действительной оси, которые лежат вне контуров γ_k. Возьмем окружность $\Gamma_N = \{\lambda : |\lambda| = N\}$ достаточно большого радиуса N с центром в начале координат. Положим $\Gamma_N = \Gamma_N' + \Gamma_N''$, где $\Gamma_N' \, (\Gamma_N'')$ контур, состоящий из полуокружности радиуса N в верхней (нижней) полуплоскости, охватывающей верхний (нижний) берег разреза по действительной оси и обходящий точки μ_k, $k = \overline{1,r}$ в верхней (нижней) полуплоскости. Сохраняя рассуждения из [11], получается формула (24) в таком видоизменении:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{\Gamma} \lambda^3 \left[R_\lambda^+ - R_\lambda^-\right] f \, d\lambda + \sum_{i=1}^{n_1} Re\ s \left[\lambda^3 R_\lambda^+ f\right]_{\lambda=\lambda_i} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n_2} R\ s \left[\lambda^3 R_\lambda^- f\right]_{\lambda=\lambda_k} + \sum_{k=1}^{r} Re\ s \left[\lambda^3 R_\lambda f\right]_{\lambda=\mu_k} \ . \tag{25}$$

Список литературы

[1] Гасымов М.Г., Магеррамов А.М. О существовании оператора преобразования дифференциальных уравнений высокого порядка, полиномиально зависящих от параметра. // ДАН СССР, 1977, т. 235, No 2, стр. 259-263.

[2] Гасымов М.Г., Магеррамов А.М. Исследование одного класса дифференциальных операторных пучков четного порядка. // ДАН СССР, 1982, т. 265, No 2, стр. 277-281.

[3] Шкаликов А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях. Труды семинара им. И.Г. Петровского, МГУ, 1983, No9, стр. 190-223.

[4] Расулов М.Л. Разложение функций в ряд полного интегрального вычета и решение смешанных задач. // ДАН СССР, 1986, т. 286, No1, стр. 42-46.

[5] Гасымов М.Г., Оруджев А.Д. О спектральных свойствах одного класса дифференциальных операторов с почти-периодическими коэффициентами и их возмущений. // ДАН СССР, 1986, т. 287, No4, стр. 777-781.

[6] Оруджев Э.Г. О краевых задачах для дифференциального уравнения 4-го порядка, полиномиально зависящего от спектрального параметра. // ДАН Азерб. ССР, 1989, т. 45, No10, стр. 7-12.

[7] Оруджев Э.Г. Прямые спектральные задачи для обыкновенного дифференциального уравнения 4-го порядка, полиномиально зависящего от спектрального параметра. // Доклады АН Азербайджана, 1998, 54(1), стр. 9-15.

[8] Orudzhev E.G. To spectral analysis of ordinary differential operators polynomially depending on a spectral parameter with periodic coefficients. // Proc. Inst. Math. Mech. Nats. Acad. Sci. Azerb., 1998, 8(15), pp. 169-175.

[9] Orudzhev E.G. Investigation of the spectrum of a class of differential pencils with almost periodic coefficients. // Dokl. Acad. Nauk Azerb., 1999, 55 (1-2), pp. 27-31.

[10] Оруджев Э.Г. Краевые задачи для дифференциальных уравнений четного порядка с кратными характеристиками. // Доклады Академии Наук, Российская Академия Наук, 1999, 368 (1), стр. 14-17.

[11] Orudzhev E.G. Spectral analysis of differential operators with multiple characteristics on a semi-axis. // Russian Mathematical Surveys, 1999, vol. 54, No2, p. 448-449.

[12] Эфендиев Р.Ф. Обратная задача для одного класса обыкновенных дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами. Математическая физика, анализ, геометрия, 2004, т.11, No2, стр. 114-121.

[13] Orudzhev E.G. Uniquennes of solution of the inverse problem of scattering theory for a fourth order differential bundle with multiple characteristics. // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 2010, vol. 6, No1, pp. 84-95.

[14] Мирзоев С.С., Оруджев Э.Г., Алиев А.Р. Спектральный анализ одного дифференциального пучка четвертого порядка на всей оси. // Доклады Академии Наук, Российская Академия Наук, 2012, т. 442, No3, стр. 312-314.

[15] Leyla M.Mamedova. On a boundary value problem for equations with multiple characteristic. Transactions of NAS of Azerbaijan, 2012, vol. XXXII, No4, pp. 71-74.

[16] Elshar G.Orduzhev and Sahil A.Aliyev. Construction of a kernel of the transformations operator for a fourth order differential bundle with multiple characteristics. // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, Special Issue, 2014, 40: 351-358.

[17] Зульфугарова Р.Т. О смешанных задачах для волнового уравнения содержащих в граничных условиях производные по времени. // Journal of Contemprorary Applied Mathematics, 2015, v. 5, No1, pp. 29-35.

[18] Orujov A.D. On the spectrum of the quadratic pencil of differential operators with periodic coefficients on the semi-axis. Boundary value problems, 2015, Art. ID 117, 16p.

[19] Оруджев Э.Г., Алиев С.А. Исследование спектра и резольвенты одного дифференциального пучка 4-го порядка с трехкратным характеристическим корнем. Научные ведомости Белгородского государственного университета, 1919, т. 51, No1, стр. 52-64.

С.А. Алиев
Нахичеванский Институт Учителей
Аяербайджан, AZ7000, г. Нахичевань, пр. Гейдара Алиева,1
E-mail: sahil.liyev83@mail.ru

Received 10 April 2019
Accepted 05 December 2019