Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 9, No 2, 2019, December
ISSN 2222-5498

О разрешимости одной краевой задачи для однородного операторного-дифференциального уравнения четвертого порядка в гильбертовом пространстве

Г.М. Эйвазлы

Аннотация. В представленной работе рассматриваются вопросы однозначной и корректной разрешимости одной краевой задачи для однородного операторно-дифференциального уравнения четвертого порядка в гильбертовом пространстве. При некоторых предположениях относительно операторного коэффициента доказывется теорема о существовании единственного решения поставленной задачи.

Ключевые слова: гильбертово пространство, операторно-дифференциальное уравнения, краевая задача, корректная разрешимость, спектр, резольвента.

2010 Mathematics Subject Classifications: 47E05, 34B05

Пусть $H-$сепарабельное гильбертово пространство. Для любых элементов $f,g \in H$ скалярное произведение и нормы элементов определим $(f,g)_H$ и $\|f\|_H$ соответственно.

Пусть A самосопряженный положительно-определенный оператор в пространстве H с областью определения $D(A)$. Для всех $p \geq 0$ определим оператор A^p с областью определения $D(A^p)$.

$D(A^p)$ является гильбертовым пространством H_p относительно скалярного произведения $(f,g)\, H_p = (A^p f,\ A_g^p)_H$. При $p=0$ считаем, что $H_0 = H$.

Пусть $L_2([0,1];H)$ есть гильбертово пространство вектор-функций, определенных почти всюду в [0,1] со значениями в H с нормой

$$\|f\|_{L_2([0,1];H)} = \left(\int_0^1 \|f(t)\|_H^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

Скалярное произведение элементов f,g определяется равенством

$$(f,g)_{L_2([0,1];H)} = \int_0^1 (f(t),g(t))_H \, dt.$$

Определим гильбертово пространство $W_2^4([0,1];H)$ следующим образом:

$$W_2^4\left([0,1]\,;H\right)=\left\{u(t):u^{(IV)}(t)\in L_2\left([0,1];H\right),\;\;A^4u(t)\in L_2\left([0,1];H\right)\right\}.$$

Скалярное произведение и норма элементов определяется следующим образом:

$$(u,v)_{W_2^4([0,1];H)}=\int\limits_0^1\left(u^{(IV)}(t),v^{(IV)}(t)\right)_H dt+\int\limits_0^1\left(u(t),A^4v(t)\right)_H dt$$

$$\|u(t)\|_{W_2^4([0,1];H)}=\left\|u^{(IV)}(t)\right\|^2_{L_2([0,1];H)}+\left\|A^2u(t)\right\|^2_{L_2([0,1];H)}.$$

Из теоремы о следах [1] следует, что если $u(t)\in W_2^4\left([0,1]\,;H\right)$, то

$$u^{(k)}(0)\in H_{4-k-\frac{1}{2}},\quad u^{(k)}(1)\in H_{4-k-\frac{1}{2}},\qquad k=0,1,2.$$

Здесь все производные понимаются в смысле теории обобщенных функций [1].

Рассмотрим следующую краевую задачу для однородного четвертого порядка:

$$Lu=u^{(IV)}+A^4u=0,\quad t\in[0,1] \tag{1}$$

$$u(0)=\varphi_0,\quad u'(0)=\varphi_1,\quad u(1)=\psi_0,\quad u'(1)=\psi_1 \tag{2}$$

Здесь

$$\varphi_0,\psi_0\in H_{7/2},\quad \varphi_1,\psi_1\in H_{5/2}.$$

Определение 1. *Если при всех $\varphi_1,\psi_1\in H_{7/2},\varphi_1,\psi_1\in H_{5/2}$ существует вектор-функция $u(x)\in W_2^4\left([0,1]\,;H\right)$, которая удовлетворяет уравнению. (1) почти всюду на [0,1], а граничные условия (2) выполняются в смысле*

$$\lim_{t\to 0}\|u(t)-\varphi_0\|\,H_{7/2}=0,\quad \lim_{t\to 0}\left\|u'(t)-\varphi_1\right\|H_{7/2}=0,$$

$$\lim_{t\to 1-0}\|u(t)-\psi_0\|\,H_{7/2}=0,\quad \lim_{t\to 1-0}\left\|u'(t)-\psi_1\right\|H_{5/7}=0,$$

то задача (1)-(2) называется однозначно и корректно разрешимой и вектор-функция $u(t)$ называется регулярным решением краевой задачи (1)-(2).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Предположим, что A является самосопряженным и положительно-определенным оператором в пространстве H. Тогда краевая задача (1)-(2) является корректно и однозначно разрешимой в пространстве $W_2^4\left([0,1]\,;H\right)$.*

Доказательство. В статье [5] нами исследована разрешимость уравнения (1) при граничных условиях

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u(1) = u'(1) = 0. \tag{3}$$

Доказана теорема о существовании единственного тривиального решения задачи (1)-(3).

Обозначим через $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ корни уравнения $\omega^4 + 1 = 0$. Легко видеть, что

$$\omega_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),\ \omega_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i),\ \omega_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \quad \omega_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i).$$

Как видно $Re\omega_1 < 0,\ Re\omega_2 < 0,\ Re\omega_3 > 0,\ Re\omega_4 > 0.$

Общим решением уравнения (1) в пространстве имеет вид

$$u(t) = e^{\omega_1 A t} x_1 + e^{\omega_2 A t} x_2 + e^{\omega_3 A(1-t)} x_3 + e^{\omega_4 A(1-t)} x_4. \tag{4}$$

Здесь x_1, x_2, x_3, x_4 являются искомыми неизвестными векторами из пространства $H_{7/2}$.

Для определения векторов x_1, x_2, x_3, x_4 используем краевые условия (2). В результате получим:

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 + e^{-\omega_3 A} x_3 + e^{-\omega_4 A} x_4 = \varphi_0 \\ \omega_1 A x_1 + \omega_2 A x_2 + \omega_3 A e^{-\omega_3 A} x_3 + \omega_4 A e^{-\omega_4 A} x_4 = \varphi_1 \\ e^{\omega_1 A} x_1 + e^{\omega_2 A} x_2 + x_3 + x_4 = \psi_0 \\ \omega_1 A e^{\omega_1 A} x_1 + \omega_2 A e^{\omega_2 A} x_2 + \omega_3 A x_3 + \omega_4 A x_4 = \psi_1\ . \end{array} \right.$$

Отсюда получаем:

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 + e^{-\omega_3 A} x_3 + e^{-\omega_4 A} x_4 = \varphi_0 \\ \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 e^{-\omega_3 A} x_3 + \omega_4 e^{-\omega_4} x_4 = A^{-1}\varphi_1 \\ e^{\omega_1 A} x_1 + e^{\omega_2 A} x_2 + x_3 + x_4 = \psi_0 \\ \omega_1 e^{\omega_1 A} x_1 + \omega_2 e^{\omega_2 A} x_2 + \omega_3 x_3 + \omega_4 x_4 = A^{-1}\psi_1\ . \end{array} \right. \tag{5}$$

Обозначим через $\Delta(\lambda)$ следующую операторную матрицу

$$\Delta(\lambda) = \begin{bmatrix} E & E & e^{-\omega_3 A} & e^{-\omega_4 A} \\ \omega_1 E & \omega_1 E & \omega_3 e^{-\omega_3 A} & \omega_3 e^{-\omega_3 A} \\ e^{\omega_1 A} & e^{\omega_1 A} & E & E \\ \omega_1 e^{\omega_1 A} & \omega_2 e^{\omega_2 A} & \omega_3 E & \omega_4 E \end{bmatrix}$$

$\Delta(A) : H_{7/2}^4 = H_{7/2} \times H_{7/2} \times H_{7/2} \times H_{7/2} \to H_{7/2}$ является оператор-матрицей. В нашей работе [5] показано, что оператор-матрица в интервале $[\mu_0, \infty)$ имеет ограниченную обратную, т.е. $\left\|\Delta^{-1}(A)\right\| \le C$, где μ_0-наименьшее собственное значение оператора A. Примем следующие оообозначения

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ A^{-1}\varphi_1 \\ \psi_0 \\ A^{-1}\psi_1 \end{pmatrix}\ .$$

Тогда система уравнений (5) запишется в следующем виде:

$$\Delta(A)X = Y. \tag{6}$$

Уравнение (6) имеет единственное решение и это решение представляется в виде

$$X = \Delta^{-1}(A)Y.$$

Отсюда неизвестные векторы определяются единственным образом. Одновременно получаем, что функция $u(t)$, определенная формулой (4), является решением задачи (1)-(2). Для решения $u(t)$ в пространстве $W_2^4([0,1]\,;H)$ получаем следующую оценку:

$$\|u(t)\|_{W_2^4([0,1];H)} \le \left\|e^{\omega_1 tA}x_1\right\|_{W_2^4([0,1];H)} + \left\|e^{\omega_2 At}x_2\right\|_{W_2^4([0,1];H)} +$$

$$+ \left\|e^{\omega_3(1-t)A}x_3\right\|_{W_2^4([0,1];H)} + \left\|e^{\omega_4(t-1)A}x_4\right\|_{W_2^4([0,1];H)} \le$$

$$\le c\left(\|\varphi_0\|_{H_{7/2}} + \|\varphi_1\|_{H_{7/2}} + \|\psi_0\|_{H_{7/2}} + \|\psi_1\|_{H_{7/2}}\right). \tag{7}$$

Из оценки (7) получаем однозначную и корректную разрешимость граничной задачи (1)-(2). Теорема доказана. □

Отметим, что корректная разрешимость некоторых классов краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка исследована в работах [2], [3], а однозначная разрешимость краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка рассмотрена в работе [4].

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Г.И. Асланову за постановку задач и ценные советы.

Список литературы

[1] Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения, Москва, Мир, 1971, . Успехи мат. наук, 1993, вып. 4, с. 172-173.

[2] Salimov M.Yu. On conditions of correct solvability of the boundary value problem of the second order operator-differential equation on finite segment. Proceedings of IMM of NAS Azerbaijan, 2009, vol. 14(22), p. 84-89.

[3] Agaeva G.A. On the exists and uniqeuness of the generalized solution of a boundary value problem of the second order operator-differential equation. Transaction of NAS of Azerbaijan, 2014, vol. 34, No4, p. 3-8.

[4] Zamanov H.I. On the solvability on boundary value problem of fourth order operator-differential equation. Journal of Gafqaz University. Mathematics and computer science, 2014, vol. 2, No1, p. 181-182.

[5] Эйвазлы Г.М. Об однозначной разрешимости краевой задачи для операторно-дифференциального уравнения четвертого порядка в гильбертовом пространстве. Journal of Baku Engineering University, Mathematics and computer science, vol. 2, No1, 2018, p. 103-110.

Г.М. Эйвазлы
Сумгаитский Государственный Университет
E-mail: aliyevagunel193@mail.ru

Received 18 Septemner 2018
Accepted 15 May 2019