

Принцип Максимума Понтрягина для Задач Оптимального Управления с Нелокальными Краевыми Условиями

Ф.М. Зейналлы

Аннотация. В данной работе исследуется задача оптимального управления, в которой состояние управляемого объекта описывается системой обыкновенного дифференциального уравнения с нелокальными краевыми условиями. Сначала исследуемая краевая задача приводится к эквивалентному интегральному уравнению и с помощью принципа сжатых отображений доказана существование и единственности решений краевой задачи при каждом фиксированном допустимом управлении. С помощью метода приращений доказываются принцип максимума Понтрягина.

Ключевые слова: нелокальная краевая задача, задача оптимального управления, необходимое условие оптимальности, Принцип максимума Понтрягина.

2010 Mathematics Subject Classifications: 34B10,34B15

1. Введение

Математическое моделирование целого ряда реальных процессов часто приводит к дифференциальным уравнениям с нелокальными условиями [1-3]. При этом решение многих задач механики и процессов управления [4] сводится к нелокальным краевым задачам. В большинстве случаев нелокальные краевые задачи могут быть двухточечными, многоточечными, интегральными или их различными линейными комбинациями. Нелокальные условия в интегральной форме возникают тогда, когда граница протекания процесса недоступна для измерения основных характеристик системы и, при этом известно только их среднее значение [5-7].

В последние годы приобрели особую актуальность задачи оптимального управления с нелокальными условиями. В работах [10-19] получены необходимые условия оптимальности для задач оптимального управления, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений с нелокальными условиями. В этих работах нелокальные условия, в основном, сохраняют в себе двухточечные и интегральные краевые условия.

Конструктивные достаточные условия существования и единственности, а так же методы численного решения таких краевых задач изучены в [8,9].

В настоящей работе исследуемая краевая задача приводится к эквивалентному интегральному уравнению, и далее, применяя принцип сжатых отображений к интегральному уравнению, доказывается теорема существования и единственности решений рассматриваемой задачи. В работе также доказывается принцип максимума Понтрягина для задач оптимального управления, описываемых обыкновенным дифференциальным уравнением с нелокальными краевыми условиями.

2. Постановка задачи.

Пусть управляемый процесс на фиксированном отрезке времени $[0, T]$ описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u) \quad (1)$$

с нелокальными краевыми условиями

$$Ax(0) + \int_0^T m(t)x(t)dt = C, \quad (2)$$

где $x(t) \in R^n$; $f(t, x, u)$ —заданная n -мерная вектор-функция; $C \in R^n$ — заданный постоянный вектор; $m(t) \in R^{n \times n}$ — заданная матрица, $u(t)$ — r -мерный измеримый и ограниченный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного множества U , т.е.

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in [0, T] \quad (3)$$

Требуется на решениях задачи (1) - (3) минимизировать функционал

$$J(u) = \varphi(x(0), x(T)) + \int_0^T F(t, x, u)dt \quad (4)$$

Здесь предполагается, что функции $f(t, x, u)$, $F(t, x, u)$ и $\varphi(x, y)$ непрерывны по совокупности своих аргументов и имеют ограниченные частные производные относительно x и y . Под решением задачи (1) - (3), соответствующей допустимому управлению $u(t)$, понимается абсолютно непрерывная функция $x(t) : [0, T] \rightarrow R^n$.

Через $C([0, T], R^n)$ обозначим пространство непрерывных функций на отрезке $[0, T]$ со значениями из пространства R^n . Очевидно, такое пространство является банаховым с нормой

$$\|x\|_{C[0, T]} = \max_{[0, T]} |x(t)|,$$

где $|\cdot|$ -является нормой в R^n .

Допустимый процесс $\{u(t), x(t, u)\}$, являющийся решением задачи (1)-(4), т.е. доставляющий минимум функционалу (4) при ограничениях (1)-(3), будем называть оптимальным процессом, а $u(t)$ — оптимальным управлением.

3. Существование решений краевой задачи (1)-(3).

В дальнейшем предполагается выполнение следующих условий:

(A1) Пусть $\det N \neq 0$, где $N = A + \int_0^T m(t) dt$.

(A2) Функция $f : [0, T] \times R^n \times R^n \rightarrow R^n$ непрерывна и существует постоянная $K \geq 0$ такая, что

$$|f(t, x, u) - f(t, y, u)| \leq K |x - y|, t \in [0, T], x, y \in R^n, u \in U.$$

(A3) $L = KTM < 1$,

здесь $M = \max_{0 \leq t, s \leq T} \|M(t, s)\|$,

$M(t, s)$ —определяется равенством

$$M(t, s) = \begin{cases} N^{-1} \left(A + \int_0^t m(s) ds \right), & \text{если } s < t, \\ -N^{-1} \int_t^T m(s) ds, & \text{если } t \leq s. \end{cases} \quad (5)$$

Теорема 3.1. Пусть выполняется условие A1).

Функция $x(\cdot) \in C([0, T], R^n)$ является абсолютно непрерывным решением задачи (1) - (3) тогда и только тогда, когда

$$x(t) = N^{-1}C + \int_0^T M(t, s)f(s, x(s), u(s))ds, \quad (6)$$

где матрица функции $M(t, s)$ определяется равенством (5).

Доказательство. Пусть функция $x = x(t)$ является решением уравнения (1). Тогда для $t \in (0, T)$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s), u(s))ds, \quad (7)$$

где $x(0)$ произвольный постоянный вектор. Для определения $x(0)$ требуемая функция, определенная равенством (7), удовлетворяет условию (2)

$$\left(A + \int_0^T m(t) dt \right) x(0) = C - \int_0^T m(t) \int_0^t f(s, x(s), u(s)) ds dt \quad (8)$$

Так как, согласно условию (A1), $\det N \neq 0$, то из равенства (8) следует

$$x(0) = N^{-1}C - N^{-1} \int_0^T m(t) \int_0^t f(s, x(s), u(s)) ds dt. \quad (9)$$

Учитывая значение $x(0)$, определяемого равенством (9) в (7), имеем

$$x(t) = N^{-1}C - N^{-1} \int_0^T m(t) \int_0^t f(s, x(s), u(s)) ds dt + \int_0^T f(s, x(s), u(s)) ds. \quad (10)$$

Далее, введя матрицу функции

$$M(t, s) = \begin{cases} N^{-1} \left(A + \int_0^t m(s) ds \right), & 5A; 8 \quad s < t, \\ -N^{-1} \int_t^T m(s) ds, & 5A; 8 \quad t \leq s, \end{cases}$$

равенство (10) можно записать в следующем эквивалентном виде

$$x(t) = N^{-1}C + \int_0^T M(t, s)f(s, x(s), u(s))ds.$$

Таким образом, доказано, что краевую задачу (1) - (3) можно переписать в эквивалентном интегральном виде (6). Прямым вычислением можно показать что, решение интегрального уравнения (6) является и решением краевой задачи (1) - (3). \square

Теорема 3.2. Пусть выполняются условия A1) - A3). Тогда, для любого $C \in R^n$ и для любого фиксированного допустимого управления краевая задача (1) - (3) имеет единственное решение, которое удовлетворяет интегральному уравнению (6)

Доказательство. Пусть $C \in R^n$ и $u(\cdot) \in U$ фиксированы. Рассмотрим отображение $P : C([0, T], R^n) \rightarrow C([0, T], R^n)$ определенного как

$$(Px)(t) = N^{-1}C + \int_0^T M(t, s)f(s, x(s), u(s))ds \quad (11)$$

Очевидно, неподвижные точки оператора P являются решением краевой задачи (1)-(2). Используя метод сжимающих операторов Банаха, покажем, что оператор P , определяемый равенством (11), имеет неподвижную точку. Для любых $v, \omega \in C([0, T], R^n)$ имеем

$$\begin{aligned} |(Pv)(t) - (P\omega)(t)| &\leq \int_0^T |M(t, s)| \cdot |f(s, v(s), u(s)) - f(s, \omega(s), u(s))| ds \leq \\ &\leq KTM \|v(\cdot) - \omega(\cdot)\|_{C[0, T]}, \end{aligned} \quad (12)$$

или

$$\|(Pv)(t) - (P\omega)(t)\|_{C[0, T]} \leq KTM \|v(\cdot) - \omega(\cdot)\|_{C[0, T]}.$$

Здесь, учитывая условие A3), получаем, что оператор P , определяемый равенством (11), является сжимающим. Тогда оператор P имеет единственную подвижную точку в $C([0, T], R^n)$. Отсюда следует, что интегральное уравнение (6) имеет единственное решение.

Теорема 2 доказана. \square

4. Формула приращения критерия качества.

Для доказательства принципа максимума Понтрягина воспользуемся методом приращений, впервые примененным в [20].

Пусть $u(t)$, $\tilde{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $t \in [0, T]$ — два допустимых управления, $x(t)$, $\tilde{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$, $t \in [0, T]$ — соответствующие им траектории. Тогда, очевидно, $\Delta x(t)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\Delta \dot{x}(t) = \Delta f(t, x, u), \quad t \in [0, T], \quad (13)$$

$$A \Delta x(0) + \int_0^T m(t) \Delta x(t) dt = 0. \quad (14)$$

Здесь $\Delta f(t, x, u) = f(t, \tilde{x}, \tilde{u}) - f(t, x, u)$ — полное приращение функции $f(t, x, u)$. Приращение функционала (4) можно записать в виде:

$$\Delta J(u) = J(\tilde{u}) - J(u) = \Delta \varphi(x(0), x(T)) + \int_0^T \Delta F(t, x, u) dt. \quad (15)$$

Пусть $\psi(t) \in R^n$ — произвольная нетривиальная вектор-функция и $\lambda \in R^n$ — числовой вектор. Тогда формулу приращения функционала (4) можем переписать в виде

$$\begin{aligned} \Delta J(u) = J(\tilde{u}) - J(u) = & \Delta \varphi(x(0), x(T)) + \\ & + \int_0^T \Delta F(t, x, u) dt + \int_0^T \langle \psi(t), \Delta \dot{x}(t) - \Delta f(t, x, u) \rangle dt + \\ & + \left\langle \lambda, A \Delta x(0) + \int_0^T m(t) \Delta x(t) \right\rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

После некоторых стандартных операций, обычно используемых при выводе необходимых условий оптимальности первого порядка для формулы приращений, получаем следующее равенство

$$\begin{aligned} \Delta J(u) = & - \int_0^T \Delta_u H(t, \psi, x, u) dt - \int_0^T \left\langle \Delta_u \frac{\partial H(t, \psi, x, u)}{\partial x}, \Delta x(t) \right\rangle dt + \\ & + \int_0^T \left\langle \dot{\psi}(t) + \frac{\partial H(t, \psi, x, u)}{\partial x} + m'(t) \lambda, \Delta x(t) \right\rangle dt + \\ & + \left\langle -\psi(0) + A' \lambda + \frac{\partial \varphi}{\partial x(0)}, \Delta x(0) \right\rangle + \left\langle \psi(T) + \frac{\partial \varphi}{\partial x(T)}, \Delta x(T) \right\rangle + \\ & + \eta_{\tilde{u}}, \\ \eta_{\tilde{u}} = & o_{\varphi}(\|x(0)\|, \|x(T)\|) - \int_0^T o_H(\|x(t)\|) dt, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$H(t, \psi, x, u) = \langle \psi(t), f(t, x, u) \rangle - F(t, x, u).$$

Теперь предположим что, неизвестная вектор-функция $\psi(t) \in R^n$ и числовой вектор λ являются решением следующей краевой задачи:

$$\dot{\psi}(t) = - \frac{\partial H(t, \psi, x, u)}{\partial x} - m'(t) \lambda, \quad t \in [0, T], \quad (18)$$

$$\psi(0) = A' \lambda + \frac{\partial \varphi}{\partial x(0)}, \quad \psi(T) = - \frac{\partial \varphi}{\partial x(T)}, \quad (19)$$

Дифференциальная краевая задача (18)-(19) называется сопряженной задачей в параметрической форме, так как она сохраняет в себе неизвестный параметр λ . Из условия A1) и из системы (18), (19) можно исключить неизвестный вектор λ . Действительно,

$$\left(A' + \int_0^T m'(t) dt \right) \lambda = 2\psi(0) - \psi(T) - \frac{\partial \varphi}{\partial x(0)} - \int_0^T \frac{\partial H(t, \psi, x, u)}{\partial x} dt.$$

Отсюда

$$\lambda = (N')^{-1} \left[2\psi(0) - \psi(T) - \frac{\partial \varphi}{\partial x(0)} - \int_0^T \frac{\partial H(t, \psi, x, u)}{\partial x} \right] dt. \quad (20)$$

Учитывая найденное из (20) значение λ в равенствах (18) и (19), имеем:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= -\frac{\partial H(t, \psi, x, u)}{\partial x} - m'(t) (N')^{-1} \times \\ &\times \left[2\psi(0) - \psi(T) - \frac{\partial \varphi}{\partial x(0)} - \int_0^T \frac{\partial H(t, \psi, x, u)}{\partial x} \right], \quad t \in [0, T], \quad \psi(T) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x(T)}, \end{aligned} \quad (21)$$

С учетом равенств (18), (19) в (17), для приращения функционала получаем окончательную форму

$$\Delta J(u) = - \int_0^T \Delta_{\bar{u}} H(t, \psi, x, u) dt - \int_0^T \left\langle \Delta_u \frac{\partial H(t, \psi, x, u)}{\partial x}, \Delta x(t) \right\rangle dt + \eta_{\bar{u}}. \quad (22)$$

5. Принцип максимума.

Известно, что при доказательстве принципа максимума Понтрягина основную роль играет игольчатая вариация:

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t \notin [\theta, \theta + \varepsilon), \\ v, & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \end{cases} \quad (23)$$

где параметры игольчатой вариации удовлетворяют следующим условиям. $\theta \in [0, T]$ – правильная точка управления $u(t)$, $\varepsilon > 0$, $\theta + \varepsilon < T$, $v \in U$. Очевидно, что при любых θ, ε, v , удовлетворяющих перечисленным условиям, управления $\bar{u}(t)$ является допустимым.

Традиционная форма необходимых условий оптимальности будет следовать из формулы приращений (22), если покажем, что приращение фазовых состояний $\Delta_\varepsilon x(t)$, соответствующее $\Delta u_\varepsilon(t)$ имеет порядок ε .

Это следует из условий A1) - A3) и краевой задачи (13), (14):

$$\Delta x(t) = \int_0^T M(t, s) [f(s, x + \Delta x, \bar{u}) - f(s, x, \bar{u})] ds + \int_0^T M(t, s) \Delta_{\bar{u}} f(s, x, u) ds \quad (24)$$

Из (24) мы получаем

$$\|\Delta x(t)\| \leq (1-L)^{-1}M \int_0^T \|\Delta_{\bar{u}}f(t, x, u)\| dt. \quad (25)$$

Если в неравенстве взять, $\bar{u}(t) = u_\varepsilon(t)$, то имеем

$$\|\Delta_\varepsilon x(t)\| \leq \tilde{L}\varepsilon, \quad t \in [0, T], \quad \tilde{L} = const > 0, \quad (26)$$

Оценка (25) показывает что, при $\bar{u}(t) = u_\varepsilon(t)$

$$\int_\theta^{\theta+\varepsilon} \left\langle \Delta_v \frac{\partial H(t, \psi, x, u)}{\partial x}, \Delta_\varepsilon x(t) \right\rangle dt + \eta_{u_\varepsilon} (\|\Delta_\varepsilon x(t)\|) = o(\varepsilon),$$

где $\Delta_\varepsilon x(t) = x(t, u_\varepsilon) - x(t, u) \sim \varepsilon$.

Используя формулу приращения (22) и свойства игольчатой вариации, имеем

$$\Delta J(u) = - \int_\theta^{\theta+\varepsilon} \Delta_v H(t, \psi, x, u) dt + o(\varepsilon). \quad (27)$$

Так как точка $t = \theta$ - правильная точка управления $u = u(t)$, то из формулы Тейлора

$$\Delta J(u) = -\Delta_v H(\theta, \psi(\theta), x(0), u(0))\varepsilon + o(\varepsilon), \quad v \in U, \quad \theta \in [0, T]. \quad (28)$$

Из формулы (28) следует принцип максимума Понтрягина.

Теорема 5.1. (Принцип максимума) Пусть допустимый процесс $u^0(t), x^0(t, u^0)$ оптимален в задаче (1) - (4), а $\psi^0(t)$ - решение сопряженной задачи (18), (19). Тогда для почти всех $t \in [0, T]$ выполняется равенство

$$\max_{v \in U} H(t, \psi^0(t), x^0(t), v) = H(t, \psi^0(t), x^0(t), u^0(t)). \quad (29)$$

Из принципа максимума следует:

Следствие 5.2. Если в задаче оптимального управления функция f линейно относительно (x, u) и функции φ, F выпуклы относительно $x(0), x(T)$ и $x(t)$, соответственно, то принцип максимума является необходимым и достаточным условием для оптимальности.

Этот факт следует из формулы приращения (22). Действительно, в этом случае

$$\Delta J(u) = - \int_0^T \Delta_{\bar{u}} H(t, \psi, x, u) dt + o_\varphi (\|\Delta x(0)\|, \|\Delta x(T)\|) + \int_0^T o_F (\|\Delta x(t)\|) dt. \quad (30)$$

Так как функции φ и F выпуклы, то $o_\varphi \geq 0, o_F \geq 0$.

В дальнейшем предположим, что функция $f(t, x, u)$ дифференцируема относительно u , а множество U - выпукло. Тогда из теоремы 3 следует:

Следствие 5.3. (Дифференциальный принцип максимума). Пусть процесс $(u^0(t), x^0(t, u^0))$, $t \in [0, T]$ оптимален в задаче (1) - (4) и $\psi^0(t)$ соответствующий решение сопряженной задачи (18)-(19). Тогда

$$\left\langle \frac{\partial H(t, \psi^0(t), x^0(t), u^0(t))}{\partial u}, u^0(t) \right\rangle = \max_{v \in U} \left\langle \frac{\partial H(t, \psi^0(t), x^0(t), u^0(t))}{\partial u}, v \right\rangle. \quad (31)$$

Заметим, что условие (31) для проверки проще, чем условие (29). Однако, предположения выпуклости U и дифференцируемости функции $f(t, x, u)$ по u сужает применение условия (31).

Отметим, что существуют задачи оптимального управления, для которых условие (31) справедливо, а принцип максимума никакой информации не дает [21]. С этим определяется значение дифференциального принципа максимума.

Из принципа максимума следует

Следствие 5.4. (Принцип стационарности). Пусть в задаче оптимального управления (1)-(4) $U \subset R^r$ - открытое множество. Тогда оптимальное управление в каждой $t \in [0, T]$ доставляет стационарное значение функции $H(t, \psi, x, u)$, т.е.

$$\frac{\partial H(t, \psi^0(t), x^0(t), u^0(t))}{\partial u} = 0.$$

Список литературы

- [1] Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. Уравнения, 1980, Т.16, №11, С. 1925-1935.
- [2] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных, Москва, Наука, 2006, 287с.
- [3] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии, Москва, Высш. шк., 1995, 301 с.
- [4] Бордюг В.Л., Ларин В.Б., Тимошенко А.Г. Задачи управления шагающими аппаратами.- Киев: Наук. Думка, 1985.-168с.
- [5] Cannon I.R., The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart.Appl.Math., 1963, V.21, No.2, pp.155-160.
- [6] Камынин Л.И. 6. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими условиями // Журн. Вычисл.математики и матем. Физики, 1964, т.4, №6, с.1006-1024.
- [7] Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач /Докл. АН СССР- 1969-185, № 4.- с. 739-740.

- [8] Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М. Задача управления с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики», Киев, 2013, No.2, с.61-77.
- [9] Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М. О решении краевых задач с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Дифференциальные уравнения, Минск, 2013, т.49, №9, с.1152–1162.
- [10] Sharifov Y.A. Conditions Optimality in Problems Control with Systems Impulsive Differential Equations Under Non-Local Boundary Conditions, Ukrainian Mathematical Journal, 2012, vol.64, No 6, pp.836-847.
- [11] Sharifov Y.A., Mammadova N.B., Optimal control problem described by impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions, Differential equations, Vol.50, No.3, 2014, pp.403-411.
- [12] Ashyralyev A., Sharifov Y.A. Optimal Control Problems for Impulsive Systems with Integral Boundary Conditions, EJDE, 2013, Vol.2013, 2013, No 80, pp.1-11.
- [13] A.R. Safari, M.F. Mekhtiyev, Y.A. Sharifov, Maximum Principle in the Optimal Problems for Systems with Integral Boundary Conditions and its Extension, Hindawi Publishing Corporation, Abstract and applied analysis, Vol.2013, ID 946910, 9 pages.
- [14] Sharifov Y.A., Mammadova N.B., On second-order necessary optimality conditions in the classical sense for systems with nonlocal conditions// Differential equations, 2012, Vol.48, No.4, pp.1-4.
- [15] Шарифов Я.А. Оптимальное управление для систем с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях// Известия вузов, Математика, 2013, №2, с.75-84.
- [16] Sharifov Y.A., Mammadova N.B. Optimal control problem described by impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions// Differential equations, Vol.50, No.3, 2014, pp.403-411.
- [17] Шарифов Я.А. Задача оптимального управления для систем с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях// Вестник Сам. гос. техн. ун-та, Сер., Физ.-мат. Науки, 2013, №4(30), с.34-45.
- [18] Mardanov M.J., Sharifov Y.A. Pontryagin's maximum principle for the optimal control problems with multipoint boundary conditions// Abstract and Applied Analysis, Vol. 2015(2015), Id 428042, 6 pages.
- [19] Марданов М.Дж., Мансимов К.Б., Меликов Т.К. Исследование особых управлений и необходимые условия оптимальности второго порядка в системах с запаздыванием. Баку, Элм, 356 с.

- [20] Розоноэр Л.И. Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем.1-3 //Автоматика и телемеханика.1959, тт.20-22, №:10-12, с.1320-1334, 1441-1456, 1561-1578.

Ф.М. Зейналлы

Гянджинский Государственный Университет

E-mail: farahzeynalli@rambler.ru

Received 28 August 2019

Accepted 18 January 2020