Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 11, No 2, 2021, December
ISSN 2222-5498

Asymptotics of the Eigenvalues and Eigenfunctions of a Non-Self-Adjoint Problem with a Spectral Parameter in the Boundary Condition

T.F. Gasimov

Abstract. In this paper we consider the nonself-adjoint spectral problem

$$-y" + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < 1,$$

with nonseparated boundary conditions

$$y\,(0) = 0, \quad y'\,(0) = (a\lambda + b)\,y\,(1)\,,$$

where λ is a spectral parameter, $q(x)$ is arbitrary complex-valued summable function, a and b are complex numbers ($a \neq 0$). Asymptotic formulas are obtained for the eigenvalues and eigenfunctions of the considered spectral problem with indication of several subsequent terms of the asymptotics.

Key Words and Phrases: Spectral problem, eigenvalues, eigenfunctions.

2010 Mathematics Subject Classifications: 34B04, 34B09, 34B24

Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 11, No 2, 2021, December
ISSN 2222-5498

Асимптотика Собственных Значений и Собственных Функций Одной Несамосопряженной Задачи со Спектральным Параметром в Краевом Условии

Т.Ф. Касимов

Аннотация. В работе рассматривается спектральная задача

$$\begin{aligned} &-y'' + q(x)\,y = \lambda y, \qquad x \in (0,1)\,, \\ &y(0) = 0, \quad y'(0) = (a\lambda + b)\,y(1)\,, \end{aligned}$$

где $\lambda-$спектральный параметр, $q(x)-$комплекснозначная суммируемая функция, a и $b-$произвольные комплексные числа ($a \neq 0$). Получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций рассматриваемой спектральной задачи с указанием нескольких последующих членов асимптотики.

Ключевые слова: Спектральная задача, собственные значения, собственные функции

2010 Mathematics Subject Classifications: 34B04, 34B09, 34B24

1. Введение

Рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$-y'' + q(x)\,y = \lambda y, \qquad x \in (0,1) \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &y(0) = 0, \\ &y'(0) = (a\lambda + b)\,y(1)\,, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $\lambda-$спектральный параметр, $q(x)$ $-$комплекснозначная суммируемая функция, a и $b-$ произвольные комплексные числа ($a \neq 0$).

Наша цель в настоящей работе получить асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций спектральной задачи (1), (2). Полученные здесь формулы могут быть использованы для исследования базисных свойств собственных функций в различных функциональных пространствах, а также в вопросах равномерной и абсолютной сходимости, и сходимости в точке биортогональных разложений функций по собственным функциям спектральной задачи. Этим вопросам будет посвящена отдельная работа.

Спектральным задачам для обыкновенных дифференциальных операторов со спектральным параметром в граничных условиях посвящены многочисленные работы. (см. например, [1-14] и имеющиеся там библиографию.) Из последних отметим работы [15-24]. Непосредственное отношение к нашей работе имеют работы [8,9,14], но мы рассматриваем более общий случай, чем в этих работах. В [8,9] рассмотрен случай $q(x) \equiv 0$, $b = 0$, а в [14] при дополнительном предположении $q(x) = q(1-x)$ рассмотрен случай $b = 0$.

2. Асимптотика собственных значений спектральной задачи (1), (2)

Примем $\lambda = \rho^2$ и через $y(x,\rho)$ обозначим решение уравнения

$$-y'' + q(x)\,y = \rho^2 y, \qquad x \in (0,1) \tag{3}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = \rho \tag{4}$$

Известно, что (см. [25, стр.16]) функция $y(x,\rho)$ удовлетворяет также интегральному уравнению

$$y(x,\rho) = \sin\rho x + \frac{1}{\rho}\int_0^x q(t)\,y(t,\rho)\sin\rho(x-t)\,dt \tag{5}$$

Продифференцируя (5) по x, получим

$$y'(x,\rho) = \rho\cos\rho x + \int_0^x q(t)\,y(t,\rho)\cos\rho(x-t)\,dt \tag{6}$$

Используя известные неравенства

$$|\sin z| \le e^{|ImZ|}, \ \ |\cos z| \le e^{|ImZ|}. \tag{7}$$

Из (5) получим следующую оценку для $y(x,\rho)$ при больших значениях $|\rho|$:

$$y(x,\rho) = \sin\rho x + O\left(\frac{e^{|Im\rho|x}}{|\rho|}\right); \ \ y'(x,\rho) = \rho\cos\rho x + O\left(e^{|Im\rho|x}\right). \tag{8}$$

Из (7) и (8), в частности, следует оценка

$$y(x,\rho) = O\left(e^{|Im\rho|x}\right) \tag{9}$$

Однако нам понадобится более точная оценка функции $y(x,\rho)$ по параметру ρ. Для этого запишем (5) для $y(t,\rho)$ и подставим ее выражение в (5) и (6) под интегралом. Тогда получим, соответственно

$$y(x,\rho) = \sin\rho x + \frac{1}{\rho}\int_0^x q(t)\left(\sin\rho t + \frac{1}{\rho}\int_0^t q(\tau)\,y(\tau,\rho)\sin\rho(t-\tau)\,d\tau\right)\cdot$$

$$\cdot \sin\rho\,(x-t)\,dt = \sin\rho x + \frac{1}{\rho}\int_0^x q\,(t)\sin\rho t\cdot\sin\rho\,(x-t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\int_0^x q\,(t)\int_0^t q\,(\tau)\,y\,(\tau,\rho)\sin\rho\,(t-\tau)\cdot\sin\rho\,(x-t)\,d\tau dt =$$

$$= \sin\rho x - \frac{1}{2\rho}\int_0^x q\,(t)\,dt\cdot\cos\rho x + \frac{1}{2\rho}\int_0^x q\,(t)\cos\rho\,(x-2t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\int_0^x q\,(t)\left(\int_0^t (q\,(\tau)\,y\,(\tau,\rho)\sin\rho\,(t-\tau)\,d\tau)\right)\sin\rho\,(x-t)\,dt.$$

Аналогично,

$$y'\,(x,\rho) = \rho\cos\rho x + \int_0^x q\,(t)\left(\sin\rho t + \frac{1}{\rho}\int_0^t q\,(\tau)\,y\,(\tau,\rho)\sin\rho\,(t-\tau)\,d\tau\right)\cdot$$

$$\cdot\cos\rho\,(x-t)\,dt = \rho\cos\rho x + \int_0^x q\,(t)\sin\rho t\cdot\cos\rho\,(x-t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{\rho}\int_0^x q\,(t)\left(\int_0^t q\,(\tau)\,y\,(\tau,\rho)\sin\rho\,(t-\tau)\,d\tau\right)\cos\rho\,(x-t)\,dt =$$

$$= \rho\cos\rho x + \int_0^x q\,(t)\,dt\cdot\sin\rho x - \frac{1}{2}\int_0^x q\,(t)\sin\rho\,(x-2t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{\rho}\int_0^x q\,(t)\left(\int_0^t q\,(\tau)\,y\,(\tau,\rho)\sin\rho\,(t-\tau)\,d\tau\right)\cdot\cos\rho\,(x-t)\,dt.$$

Теперь,с учетем (7), (8), отсюда получим

$$y\,(x,\rho) = \sin\rho x - \frac{1}{2\rho}\int_0^x q\,(t)\,dt\cdot\cos\rho x + \frac{1}{2\rho}\int_0^x q\,(t)\cos\rho\,(x-2t)\,dt + O\left(\frac{e^{|Im\rho|x}}{|\rho|^2}\right), \quad (10)$$

$$y'\,(x,\rho) = \rho\cos\rho x + \frac{1}{2}\int_0^x q\,(t)\,dt\cdot\sin\rho x - \frac{1}{2}\int_0^x q\,(t)\sin\rho\,(x-2t)\,dt + O\left(\frac{e^{|Im\rho|x}}{|\rho|}\right). \quad (11)$$

Справедлива следующая

Теорема 2.1. *Собственные значения спектральной задачи* (1), (2) *асимптотически просты и имеют асимптотику*
$\lambda_k = \rho_k^2$, *где* $(k = 0, 1, 2, ...)$

$$\rho_k = \pi k + \frac{a_k}{k} + \frac{b_k}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (12)$$

здесь обозначены

$$a_k = \frac{1+(-1)^k\,aq}{a\pi}, \quad b_k = \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi}\int_0^1 q\,(t)\cos 2\pi ktdt\,,\ q = \frac{1}{2}\int_0^1 q\,(t)\,dt\ ..$$

Доказательство. Функция $y(x,\rho)$ удовлетворяет условию $y(0)=0$. Потребуем, чтобы она удовлетворяла также условию $y'(0)=(a\lambda+b)\,y(1)$, т.е.

$$y'(0,\rho)=\left(a\rho^2+b\right)y(1,\rho). \tag{13}$$

Учитывая, что

$$y'(0,\rho)=\rho,$$

$$y(1,\rho)=\sin\rho-\frac{q}{\rho}\cos\rho+\frac{1}{2\rho}\int_0^1 q(t)\cos\rho(1-2t)\,dt+O\left(\frac{e^{|Im\rho|}}{|\rho|^2}\right).$$

Подставляя эти выражения в (13), получим следующее уравнения

$$\rho=\left(a\rho^2+b\right)\left(\sin\rho-\frac{q}{\rho}\cos\rho+\frac{1}{2\rho}\int_0^1 q(t)\cos\rho(1-2t)\,dt+O\left(\frac{e^{|Im\rho|}}{|\rho|^2}\right)\right).$$

Отметим, что число $\lambda=-\frac{b}{a}$ не может быть собственным значением задачи (1), (2), так как в этом случае соответствующее решение уравнения (1) удовлетворяет начальным условиям $y(0)=0$ и $y'(0)=0$, и поэтому оно тривиально, т.е. $y(x)\equiv 0$. Тогда собственные значения задачи (1), (2) являются квадратами нулей следующего уравнения:

$$\delta(\rho)=\sin\rho-\frac{\rho}{a\rho^2+b}-\frac{q}{\rho}\cos\rho+\frac{1}{2\rho}\int_0^1 q(t)\cos\rho(1-2t)\,dt+O\left(\frac{e^{|Im\rho|}}{|\rho|^2}\right). \tag{14}$$

Легко заметить, что при $|Im\rho|\to\infty \quad \exists C>0$:

$$|\delta(\rho)|\geq Ce^{|Im\rho|}.$$

Поэтому все нули функции $\delta(\rho)$ расположены в некоторой полосе $|Im\rho|\leq h$. При выполнении условий $|Im\rho|\leq h$ и $|\rho|\to\infty$ из (14), в частности получаем

$$\delta(\rho)=\sin\rho+O\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{15}$$

Применяя теорему Руше [26, с.425], получаем, что при достаточно больших $|\rho|$ около каждого нуля функции $\sin\rho$, т.е. $\rho=\pi k$, расположен только один нуль функции $\delta(\rho)$, поэтому для нулей ρ_k функции $\delta(\rho)$ справедливо соотношение

$$\rho_k=\pi k+\delta_k,$$

где $\delta_k=O\left(\frac{1}{k}\right)$. Уточним оценку δ_k. Подставляя в (14) $\rho=\rho_k$, получим

$$\sin\delta_k=\frac{\pi k+O\left(\frac{1}{k}\right)}{a\left(\pi k+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)^2+b}+\frac{q}{\pi k+O\left(\frac{1}{k}\right)}\cos\left(\pi k+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)-\frac{1}{2\left(\pi k+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)}\cdot$$

$$\cdot \int_0^1 q(t)\cos\left(\pi k + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)(1-2t)\,dt + O\left(\frac{1}{k^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{a\pi k} + \frac{(-1)^k q}{\pi k} - \frac{(-1)^k}{2\pi k}\int_0^1 q(t)\cos 2\pi k t dt + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Тогда

$$\delta_k = \frac{a_k}{k} + \frac{b_k}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \tag{16}$$

где

$$b_k = \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi}\int_0^1 q(t)\cos 2\pi k t dt, \qquad a_k = \frac{1+(-1)^k aq}{a\pi}. \tag{17}$$

Очевидно, что последовательность $\{a_k\}$ ограничена, а из теоремы Лебега –Римана следует, что $\{b_k\}$ имеет порядок $b_k = o(1)$ при $k \to \infty$. $\square$

3. Асимптотика собственных функций спектральной задачи (1), (2)

Асимптотику собственных функций будем находить в двух приближениях: с точностью $O\left(\frac{1}{k}\right)$ и точностью $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$. В вопросах базисности достаточно иметь асимптотику с остатком $O\left(\frac{1}{k}\right)$.

Очевидно, что собственными функциями спектральной задачи (1), (2) являются $y_k(x) = y(x,\rho_k)$, где $y(x,\rho)$ –решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям (4). Так как $y(x,\rho_k)$ удовлетворяет также условию (13), то она является собственной функцией, соответствующей собственному значению $\lambda_k = \rho_k^2$. Следовательно, подставляя в первой формуле (8) $\rho = \rho_k$, имеем

$$y_k(x) = y(x,\rho_k) = \sin\rho_k x + O\left(\frac{1}{\rho_k}\right) =$$

$$= \sin\left(\pi k + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)x + O\left(\frac{1}{\pi k + O\left(\frac{1}{k}\right)}\right) = \sin\pi k + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

Таким образом, доказано

Теорема 3.1. *Для собственных функций спектральной задачи* (1), (2) *справедливы асимптотические формулы*

$$y(x) = \sin\pi k x + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k = 0,1,2,... \tag{18}$$

Однако в вопросах сходимости в точке, а также равномерной сходимости биортогональных разложений по собственным функциям задачи (1), (2) нужно иметь более точные оценки остаточного члена.

Справедлива следующая

Теорема 3.2. *Для собственных функций спектральной задачи* (1), (2) *справедлива следующая уточненная асимптотика*

$$y_k(x) = \sin \pi kx + \left(\frac{a_k}{k} + \frac{b_k}{k}\right) x \cdot \cos \pi kx - \frac{1}{2\pi k}\left(\int_0^x q(t)\,dt\right)\cos \pi kx +$$

$$+\frac{1}{2\pi k}\int_0^x q(t)\cos \pi k(x-2t)\,dt + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \tag{19}$$

где a_k и b_k определены формулами (17).

Доказательство. Асимптотику собственных функций будем находит из (10), подставляя там вместо ρ значение ρ_k из (12).

$$y_k(x) = \sin \rho_k x - \frac{1}{2\rho}\int_0^x q(t)\,dt \cdot \cos \rho_k x + \frac{1}{2\rho_k}\int_0^x q(t)\cos \rho_k(x-2t)\,dt + O\left(\frac{1}{\rho_k^2}\right). \tag{20}$$

Предварительно получим некоторые асимптотические оценки. Все оценки будем получать с остатком $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$. Учитывая оценку (16) для δ_k, а также известные соотношения $\sin\delta = \delta + O\left(\delta^3\right)$ и $\cos\delta = 1 + O\left(\delta^2\right)$ при $\delta \to 0$, имеем следующие оценки

$$\sin \rho_k x = \sin(\pi k + \delta_k)x = \sin \pi kx \cdot \cos \delta_k x + \cos \pi kx \cdot \sin \delta_k x =$$

$$= \sin \pi kx\left(1 + O\left(\delta_k^2\right)\right) + \cos \pi kx\left(\delta_k x + O\left(\delta_k^3\right)\right) = \sin \pi kx + \delta_k x \cdot \cos \pi kx + O\left(\frac{1}{k^2}\right);$$

$$\cos \rho_k x = \cos(\pi k + \delta_k)x = \cos \pi kx \cdot \cos \delta_k x - \sin \pi kx \cdot \sin \delta_k x =$$

$$= \cos \pi kx\left(1 + O\left(\delta_k^2\right)\right) - \sin \pi kx\left(\delta_k x + O\left(\delta_k^3\right)\right) = \cos \pi kx - \delta_k x \cdot \sin \pi kx + O\left(\frac{1}{k^2}\right);$$

$$\sin \rho_k(x-2t) = \cos \pi k(x-2t) - \delta_k(x-2t)\sin \pi k(x-2t) + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$\frac{1}{\rho_k} = \frac{1}{\pi k + \delta_k} = \frac{1}{\pi k}\left(1 + O\left(\frac{\delta_k}{k}\right)\right) = \frac{1}{\pi k} + O\left(\frac{1}{k^3}\right).$$

Учитывая все эти оценки в (20) и упрощая полученные выражения, получаем справедливость формулы (19). □

4. Сопряженная спектральная задача

Непосредственно проверяется, что сопряженная задача имеет вид

$$-z'' + \overline{q(x)}z = \lambda z, \qquad x \in (0,1) \tag{21}$$

$$\begin{cases} z(1) = 0, \\ z'(1) + \left(\bar{a}\lambda + \bar{b}\right)z(0) = 0 \end{cases} \tag{22}$$

Через $z(x,\rho)$ $\left(\lambda=\rho^2\right)$ обозначим решение уравнения

$$-z''+\overline{q(x)}z=\rho^2 z$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$z(1)=0,\quad z'(1)=-\rho.$$

Функция $z(x,\rho)$ является также решением интегрального уравнения

$$z(x,\rho)=\sin\rho(1-x)+\frac{1}{\rho}\int_x^1\overline{q(x)}z(t,\rho)\sin\rho(t-x)\,dt \tag{23}$$

Собственными значениями сопряженной задачи являются $\bar{\lambda}_k=\bar{\rho}_k^2$. Найдем асимптотику собственных функций

$$z_k(x)=z(x,\bar{\rho}_k)=\sin\bar{\rho}_k(1-x)+O\left(\frac{1}{\rho_k}\right)=\sin\pi k(1-x)+O\left(\frac{1}{k}\right)=$$

$$=(-1)^{k+1}\sin\pi kx+O\left(\frac{1}{k}\right)$$

Для получения более точной асимптотики, преобразуем интегральное уравнение (23) следующим образом

$$z(x,\rho)=\sin\rho(1-x)+\frac{1}{\rho}\int_x^1\overline{q(x)}\left(\sin\rho(1-t)+\frac{1}{\rho}\int_t^1\overline{q(x)}z(\tau,\rho)\sin\rho(\tau-t)\,d\tau\right)\cdot$$

$$\cdot\sin\rho(t-x)\,dt=\sin\rho(1-x)+\frac{1}{\rho}\int_x^1\overline{q(x)}\sin\rho(1-t)\sin\rho(t-x)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\int_x^1\overline{q(x)}\left(\int_t^1\overline{q(x)}z(\tau,\rho)\sin\rho(\tau-t)\,d\tau\right)\sin\rho(t-x)\,dt=$$

$$=\sin\rho(1-x)-\frac{1}{2\rho}\int_x^1\overline{q(x)}dt\cdot\cos\rho(1-x)+\frac{1}{2\rho}\int_x^1\overline{q(x)}\cos\rho(1-2t+x)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\int_x^1\overline{q(x)}\left(\int_t^1\overline{q(x)}z(\tau,\rho)\sin\rho(\tau-t)\,d\tau\right)\sin\rho(t-x)\,dt. \tag{24}$$

Для решения $z(x,\rho)$ уравнение (21) справедлива аналогичная (9) оценка: $z(x,\rho)=O\left(e^{|Im\rho|(1-x)}\right)$. Подставляя это в последнем слагаемом в (24) под интегралом и учитывая оценки (7), (8), получим

$$z(x,\rho)=\sin\rho(1-x)-\frac{1}{2\rho}\int_x^1\overline{q(x)}dt\cdot\cos\rho(1-x)+\frac{1}{2\rho}\int_x^1\overline{q(x)}\cos\rho(1-2t+x)\,dt+$$

$$+O\left(\frac{e^{|Im\rho|(1-x)}}{|\rho^2|}\right) \tag{25}$$

Подставляя $\rho = \bar{\rho}_k$,

$$z_k(x) = \sin\bar{\rho}_k(1-x) - \frac{1}{2\bar{\rho}_k}\int_x^1 \overline{q(x)}dt \cdot \cos\bar{\rho}_k(1-x) +$$

$$+\frac{1}{2\bar{\rho}_k}\int_t^1 \overline{q(x)}\cos\rho(1-2t+x)\,dt + O\left(\frac{1}{\rho_k^2}\right) \tag{26}$$

где $\bar{\rho}_k = \pi k + \vec{\delta}_k$; $\delta_k = \frac{a_k}{k} + \frac{b_k}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$. Поступая аналогично, как и при получении оценки (19), имеем

$$\sin\bar{\rho}_k(1-x) = \sin\left(\pi k + \bar{\delta}_k\right)(1-x) = \sin\pi k(1-x)\cdot\cos\bar{\delta}_k(1-x) +$$

$$+\cos\pi k(1-x)\sin\bar{\delta}_k(1-x) = \sin\pi k(1-x) + \left(\frac{\bar{a}_k + \bar{b}_k}{k}\right)(1-x)\cdot\cos\pi k(1-x) + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$\cos\bar{\rho}_k(1-x) = \cos\left(\pi k + \bar{\delta}_k\right)(1-x) = \cos\pi k(1-x)\cdot\cos\bar{\delta}_k(1-x) -$$

$$-\sin\pi k(1-x)\cdot\sin\bar{\delta}_k(1-x) = \cos\pi k(1-x) - \frac{\bar{a}_k + \bar{b}_k}{k}(1-x)\cdot\sin\pi k(1-x) + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$\cos\bar{\rho}_k(1-2t+x) = \cos\left(\pi k + \bar{\delta}_k\right)(1+x-2t) = (-1)^k\cos\left(\pi k + \bar{\delta}_k\right)(x-2t) =$$

$$= (-1)^k\cos\pi k(x-2t) - (-1)^k\frac{\bar{a}_k + \bar{b}_k}{k}(x-2t)\cdot\sin\pi k(x-2t) + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Учитывая полученные оценки, из (26) получим

$$z_k(x) = \sin\pi k(1-x) + \frac{\bar{a}_k + \bar{b}_k}{k}\cos\pi k(1-x) -$$

$$-\frac{1}{2\pi k}\int_x^1 \overline{q(x)}dt\cdot\cos\pi k(1-x) + \frac{(-1)^k}{2\pi k}\int_x^1 \overline{q(x)}\cos\pi k(x-2t)\,dt + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \tag{27}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 4.1. *Для собственных функций сопряженной спектральной задачи* (21), (22) *справедливы асимптотические формулы* (27).

Очевидно, что все собственные функции $z_k(x)$ сопряженной задачи (21), (22) удовлетворяют условию $z_k(0) \neq 0$. Так как, в противном случае мы получаем, что она удовлетворяет уравнению (21) и начальным условиям $z_k(1) = 0$, $z_k'(1) = 0$. Тогда она является тривиальным решением уравнения (21), т.е. $z_k(x) \equiv 0$, противоречить тому, что она является собственной функцией. Этот факт является очень важным при изучении вопроса базисности собственных функций в пространстве $L_p(0,1)$.

В заключении автор выражает благодарность своему научному руководителю д.м.н. Т.Б.Касумову за постановку задачи и за ценные советы при выполнении этой работы.

Список литературы

[1] Аткинсон Ф.Б. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968, 749 с.

[2] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнение математической физики. М.: Наука, 1977, 766 с.

[3] Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения, 1997, т.33, No 1, с. 115-119.

[4] Gomilko A.M., Pivovarchik V.N. On bases of eigenfunctions of boundary problem associated with small vibrations of damped non smooth inhomogeneous string // Asympt. Anal. 1999., v.20 No 3-4, p.301-315.

[5] Керимов Н.Б., Мирзоев В.С. О базисных свойствах одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Сиб. мат. журн. 2003, т.44, No 5, с.1041-1045.

[6] Kerimov N.B., Poladov R.G. On basicity in of the system of eigenfunctions of one boundary value problem II // Proc. IMM NAS Azerb., 2005, v.23, p. 65-76.

[7] Керимов Н.Б., Алиев З.С. О базисных свойствах собственных функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Докл. РАН, 2007, т.412, No 1, с. 18-21.

[8] Marchenkov D.B. On the convergence of spectral expansions of functions for problems with a spectral parameter in a boundary condition// Differential Equations, 2005, vol. 41, No. 10, pp. 1496-1500.

[9] Marchenkov D.B. Basis property of the system of eigenfunctions corresponding to a problem with a spectral parameter in the boundary condition// Differential Equations, 2006, vol. 42, No. 6, pp. 905-908.

[10] Gasymov T.B., Mammadova Sh.J. On convergence of spectral expansions for one discontinuous problem with spectral parameter in the boundary condition // Trans. Of NAS of Azerb. 2006,vol. XXVI, No 4, p. 103-116.

[11] Gasymov T.B., Huseynli A.A. The basis properties of eigenfunctions of a discontinuous differential operator with a spectral parameter in boundary condition // Proc. of IMM of NAS of Azerb. vol. XXXV(XLIII), 2011, pp. 21-32.

[12] Shahriari M., Akbarfam J.A., Teschl G. Uniqueness for inverse Sturm-Liouville problems with a finite number of transmission conditions. J.Math. Anal. Appl. 395. 19-29(2012).

[13] Shahriari M. Inverse Sturm-Liouville Problem with Eigenparameter Dependent Boundary and Transmission Conditions. Azerb. J. Math., 4(2) (2014), 16-30.

[14] Kerimov N.B., Maris E.A. On the basis properties and convergence of expansions in terms of eigenfunctions for a spectral problem with a spectral parameter in the boundary condition// Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 2014, v.40, Special Issue, pp. 245-258.

[15] Bilalov B.T., Gasymov T.B. On bases for direct decomposition. Doklady Mathematics. 93(2) (2016).pp 183-185.

[16] Bilalov B.T., Gasymov T.B. On basicity a system of eigenfunctions of second order discontinuous differential operator // Ufa Mathematical Journal, 2017, v. 9, No 1, p.109-122.

[17] Магеррамова Г.В. О полноте собственных функций одного дифференциального оператора второго порядка, Journal of Contemporary Applied Mathematics, v.8, No 2, 2018, c.45-55.

[18] Gasymov T.B., G.V. Maharramova. The stability of the basis properties of multiple systems in a Banach space with respect to certain transformations // Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics. V. 6, No 2, 2018, December, p. 66-77.

[19] Gasymov T.B, Maharramova G.V., Mammadova N.G. Spectral properties of a problem of vibrations of a loaded string in Lebesgue spaces. Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, 38(1), 62-68(2018), Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences.

[20] Gasymov T.B, Maharramova G.V., Jabrailova A.N. Spectral properties of the problem of vibration of a loaded string in Morrey type spaces. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, Volume 44, Number 1, 2018, Pages 116-122.

[21] Билалов Б.Т., Касумов Т.Б., Магеррамова Г.В. О базисности собственных функций одной спектральной задачи с точкой разрыва в лебеговых пространствах, Дифференц. уравнения, 2019, т.55, № 12, с. 1-10.

[22] Maharramova G.V. Properties of Eigenvalues and Eigenfunctions of a Spectral Problem with Discontinuity Point // Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics V. 7, No 1, 2019, July, pp.114-125.

[23] Касумов Т.Б., Магеррамова Г.В., Касимов Т.Ф. О полноте и минимальности собственных функций одной спектральной задачи в пространствах $\boldsymbol{L_p \oplus C}$ и $\boldsymbol{L_p}$ // Journal of Contemporary Applied Mathematics, v.10, No2, 2020, c.85-100.

[24] T.B.Gasymov, A.M.Akhtyamov, N.R.Ahmedzade. On the basicity of eigenfunctions of a second-order differential operator with a discontinuity point in weighted lebesgue spaces // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, Volume 46, Number 1, 2020, Pages 32–44.

[25] Levitan B.M., Sargsjan I.S. Introduction to spectral theory//Amer. Math. Soc.,1975

[26] Маркушевич А.И. Теория аналитических функции. Т. I, Москва, Наука, 1967

Касимов Т.Ф.
Азербайджанский Технологический Университет, Гянджа, Азербайджан
E-mail: tehransened@mail.ru

Received 05 January 2021
Accepted 26 June 2021