

Asymptotics of the Eigenvalues and Eigenfunctions of a Non-Self-Adjoint Problem with a Spectral Parameter in the Boundary Condition

T.F. Kasimov

Abstract. In this paper we consider the nonself-adjoint spectral problem

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < 1,$$

with nonseparated boundary conditions

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = (a\lambda + b)y(1),$$

where λ is a spectral parameter, $q(x)$ is arbitrary complex-valued summable function, a and b are complex numbers ($a \neq 0$). Asymptotic formulas are obtained for the eigenvalues and eigenfunctions of the considered spectral problem with indication of several subsequent terms of the asymptotics.

Key Words and Phrases: Spectral problem, eigenvalues, eigenfunctions.

2010 Mathematics Subject Classifications: 34B04, 34B09, 34B24

Асимптотика Собственных Значений и Собственных Функций Одной Несамосопряженной Задачи со Спектральным Параметром в Краевом Условии

Гасымов Т.Ф.

Аннотация. В работе рассматривается спектральная задача

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda y, & x \in (0, 1), \\ y(0) = 0, & y'(0) = (a\lambda + b)y(1), \end{aligned}$$

где λ —спектральный параметр, $q(x)$ —комплекснозначная суммируемая функция, a и b —произвольные комплексные числа ($a \neq 0$). Получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций рассматриваемой спектральной задачи.

Ключевые слова: Спектральная задача, собственные значения, собственные функции

2010 Mathematics Subject Classifications: 34B04, 34B09, 34B24

1. Введение

Рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0, 1) \tag{1}$$

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= 0, \\ y'(0) &= (a\lambda + b)y(1), \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

где λ —спектральный параметр, $q(x)$ —комплекснозначная суммируемая функция, a и b — произвольные комплексные числа ($a \neq 0$).

Наша цель в настоящей работе получить асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций спектральной задачи (1), (2). Полученные здесь формулы могут быть использованы для исследования базисных свойств собственных функций в различных функциональных пространствах, а также в вопросах равномерной и абсолютной сходимости, и сходимости в точке биортогональных разложений функций по собственным функциям спектральной задачи. Этим вопросам будет посвящена отдельная работа.

Спектральным задачам для обыкновенных дифференциальных операторов со спектральным параметром в граничных условиях посвящены многочисленные работы. (см. например, [1-14] и имеющиеся там библиографию.) Из последних отметим работы [15-24]. Непосредственное отношение к нашей работе имеют работы [8,9,14], но мы рассматриваем более общий случай, чем в этих работах. В [8,9] рассмотрен случай $q(x) \equiv 0$, $b = 0$, а в [14] при дополнительном предположении $q(x) = q(1-x)$ рассмотрен случай $b = 0$.

2. Асимптотика собственных значений спектральной задачи (1), (2)

Примем $\lambda = \rho^2$ и через $y(x, \rho)$ обозначим решение уравнения

$$-y'' + q(x)y = \rho^2 y, \quad x \in (0, 1) \quad (3)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = \rho \quad (4)$$

Известно, что (см. [25, стр.16]) функция $y(x, \rho)$ удовлетворяет также интегральному уравнению

$$y(x, \rho) = \sin \rho x + \frac{1}{\rho} \int_0^x q(t) y(t, \rho) \sin \rho(x-t) dt \quad (5)$$

Продифференцируя (5) по x , получим

$$y'(x, \rho) = \rho \cos \rho x + \int_0^x q(t) y(t, \rho) \cos \rho(x-t) dt \quad (6)$$

Используя известные неравенства

$$|\sin z| \leq e^{|ImZ|}, \quad |\cos z| \leq e^{|ImZ|}. \quad (7)$$

Из (5) получим следующую оценку для $y(x, \rho)$ при больших значениях $|\rho|$:

$$y(x, \rho) = \sin \rho x + O\left(\frac{e^{|Im\rho|x}}{|\rho|}\right); \quad y'(x, \rho) = \rho \cos \rho x + O\left(e^{|Im\rho|x}\right). \quad (8)$$

Из (7) и (8), в частности, следует оценка

$$y(x, \rho) = O\left(e^{|Im\rho|x}\right) \quad (9)$$

Однако нам понадобится более точная оценка функции $y(x, \rho)$ по параметру ρ . Для этого запишем (5) для $y(t, \rho)$ и подставим ее выражение в (5) и (6) под интегралом. Тогда получим, соответственно

$$y(x, \rho) = \sin \rho x + \frac{1}{\rho} \int_0^x q(t) \left(\sin \rho t + \frac{1}{\rho} \int_0^t q(\tau) y(\tau, \rho) \sin \rho(t-\tau) d\tau \right) dt.$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \sin \rho(x-t) dt = \sin \rho x + \frac{1}{\rho} \int_0^x q(t) \sin \rho t \cdot \sin \rho(x-t) dt + \\
& + \frac{1}{\rho^2} \int_0^x q(t) \int_0^t q(\tau) y(\tau, \rho) \sin \rho(t-\tau) \cdot \sin \rho(x-t) d\tau dt = \\
& = \sin \rho x - \frac{1}{2\rho} \int_0^x q(t) dt \cdot \cos \rho x + \frac{1}{2\rho} \int_0^x q(t) \cos \rho(x-2t) dt + \\
& + \frac{1}{\rho^2} \int_0^x q(t) \left(\int_0^t (q(\tau) y(\tau, \rho) \sin \rho(t-\tau) d\tau) \right) \sin \rho(x-t) dt.
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
y'(x, \rho) &= \rho \cos \rho x + \int_0^x q(t) \left(\sin \rho t + \frac{1}{\rho} \int_0^t q(\tau) y(\tau, \rho) \sin \rho(t-\tau) d\tau \right) \cdot \\
& \cdot \cos \rho(x-t) dt = \rho \cos \rho x + \int_0^x q(t) \sin \rho t \cdot \cos \rho(x-t) dt + \\
& + \frac{1}{\rho} \int_0^x q(t) \left(\int_0^t q(\tau) y(\tau, \rho) \sin \rho(t-\tau) d\tau \right) \cos \rho(x-t) dt = \\
& = \rho \cos \rho x + \int_0^x q(t) dt \cdot \sin \rho x - \frac{1}{2} \int_0^x q(t) \sin \rho(x-2t) dt + \\
& + \frac{1}{\rho} \int_0^x q(t) \left(\int_0^t q(\tau) y(\tau, \rho) \sin \rho(t-\tau) d\tau \right) \cdot \cos \rho(x-t) dt.
\end{aligned}$$

Теперь, с учетом (7), (8), отсюда получим

$$y(x, \rho) = \sin \rho x - \frac{1}{2\rho} \int_0^x q(t) dt \cdot \cos \rho x + \frac{1}{2\rho} \int_0^x q(t) \cos \rho(x-2t) dt + O\left(\frac{e^{|Im\rho|x}}{|\rho|^2}\right), \quad (10)$$

$$y'(x, \rho) = \rho \cos \rho x + \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt \cdot \sin \rho x - \frac{1}{2} \int_0^x q(t) \sin \rho(x-2t) dt + O\left(\frac{e^{|Im\rho|x}}{|\rho|}\right). \quad (11)$$

Справедлива следующая

Теорема 2.1. Собственные значения спектральной задачи (1), (2) асимптотически просты и имеют асимптотику

$\lambda_k = \rho_k^2$, где $(k = 0, 1, 2, \dots)$

$$\rho_k = \pi k + \frac{a_k}{k} + \frac{b_k}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (12)$$

здесь обозначены

$$a_k = \frac{1 + (-1)^k a q}{a\pi}, \quad b_k = \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi} \int_0^1 q(t) \cos 2\pi k t dt, \quad q = \frac{1}{2} \int_0^1 q(t) dt \dots$$

Доказательство. Функция $y(x, \rho)$ удовлетворяет условию $y(0) = 0$. Потребуем, чтобы она удовлетворяла также условию $y'(0) = (a\lambda + b)y(1)$, т.е.

$$y'(0, \rho) = (a\rho^2 + b)y(1, \rho). \quad (13)$$

Учитывая, что

$$y'(0, \rho) = \rho,$$

$$y(1, \rho) = \sin \rho - \frac{q}{\rho} \cos \rho + \frac{1}{2\rho} \int_0^1 q(t) \cos \rho (1 - 2t) dt + O\left(\frac{e^{|Im\rho|}}{|\rho|^2}\right).$$

Подставляя эти выражения в (13), получим следующее уравнение

$$\rho = (a\rho^2 + b) \left(\sin \rho - \frac{q}{\rho} \cos \rho + \frac{1}{2\rho} \int_0^1 q(t) \cos \rho (1 - 2t) dt + O\left(\frac{e^{|Im\rho|}}{|\rho|^2}\right) \right).$$

Отметим, что число $\lambda = -\frac{b}{a}$ не может быть собственным значением задачи (1), (2), так как в этом случае соответствующее решение уравнения (1) удовлетворяет начальным условиям $y(0) = 0$ и $y'(0) = 0$, и поэтому оно тривиально, т.е. $y(x) \equiv 0$. Тогда собственные значения задачи (1), (2) являются квадратами нулей следующего уравнения:

$$\delta(\rho) = \sin \rho - \frac{\rho}{a\rho^2 + b} - \frac{q}{\rho} \cos \rho + \frac{1}{2\rho} \int_0^1 q(t) \cos \rho (1 - 2t) dt + O\left(\frac{e^{|Im\rho|}}{|\rho|^2}\right). \quad (14)$$

Легко заметить, что при $|Im\rho| \rightarrow \infty \quad \exists C > 0$:

$$|\delta(\rho)| \geq Ce^{|Im\rho|}.$$

Поэтому все нули функции $\delta(\rho)$ расположены в некоторой полосе $|Im\rho| \leq h$. При выполнении условий $|Im\rho| \leq h$ и $|\rho| \rightarrow \infty$ из (14), в частности получаем

$$\delta(\rho) = \sin \rho + O\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (15)$$

Применяя теорему Руше [26, с.425], получаем, что при достаточно больших $|\rho|$ около каждого нуля функции $\sin \rho$, т.е. $\rho = \pi k$, расположен только один нуль функции $\delta(\rho)$, поэтому для нулей ρ_k функции $\delta(\rho)$ справедливо соотношение

$$\rho_k = \pi k + b_k,$$

где $\delta_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$. Уточним оценку δ_k . Подставляя в (14) $\rho = \rho_k$, получим

$$\sin \delta_k = \frac{\pi k + O\left(\frac{1}{k}\right)}{a(\pi k + O\left(\frac{1}{k}\right))^2 + b} + \frac{q}{\pi k + O\left(\frac{1}{k}\right)} \cos\left(\pi k + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) - \frac{1}{2(\pi k + O\left(\frac{1}{k}\right))}.$$

$$\begin{aligned} & \cdot \int_0^1 q(t) \cos \left(\pi k + O \left(\frac{1}{k} \right) \right) (1-2t) dt + O \left(\frac{1}{k^2} \right) = \\ & = \frac{1}{a\pi k} + \frac{(-1)^k q}{\pi k} - \frac{(-1)^k}{2\pi k} \int_0^1 q(t) \cos 2\pi k t dt + O \left(\frac{1}{k^2} \right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\delta_k = \frac{a_k}{k} + \frac{b_k}{k} + O \left(\frac{1}{k^2} \right) \quad (16)$$

где

$$b_k = \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi} \int_0^1 q(t) \cos 2\pi k t dt, \quad a_k = \frac{1 + (-1)^k a q}{a\pi}. \quad (17)$$

($\{a_k\}$ огр., $b_k = o(1)$)

Очевидно, что последовательность $\{a_k\}$ ограничена, а из теоремы Лебега –Римана следует, что $\{b_k\}$ имеет порядок $b_k = o(1)$ при $k \rightarrow \infty$. \square

3. Асимптотика собственных функций спектральной задачи (1), (2)

Асимптотику собственных функций будем находить в двух приближениях: с точностью $O \left(\frac{1}{k} \right)$ и точностью $O \left(\frac{1}{k^2} \right)$. В вопросах базисности достаточно иметь асимптотику с остатком $O \left(\frac{1}{k} \right)$.

Очевидно, что собственными функциями спектральной задачи (1), (2) являются $y_k(x) = y(x, \rho_k)$, где $y(x, \rho)$ – решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям (4). Так как $y(x, \rho_k)$ удовлетворяет также условию (13), то она является собственной функцией, соответствующей собственному значению $\lambda_k = \rho_k^2$. Следовательно, подставляя в первой формуле (8) $\rho = \rho_k$, имеем

$$\begin{aligned} y_k(x) &= y(x, \rho_k) = \sin \rho_k x + O \left(\frac{1}{\rho_k} \right) = \\ &= \sin \left(\pi k + O \left(\frac{1}{k} \right) \right) x + O \left(\frac{1}{\pi k + O \left(\frac{1}{k} \right)} \right) = \sin \pi k + O \left(\frac{1}{k} \right) \end{aligned}$$

Таким образом, доказано

Теорема 3.1. *Для собственных функций спектральной задачи (1), (2) справедливы асимптотические формулы*

$$y(x) = \sin \pi k x + O \left(\frac{1}{k} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Однако в вопросах сходимости в точке, а также равномерной сходимости биортонормальных разложений по собственным функциям задачи (1), (2) нужно иметь более точные оценки остаточного члена.

Справедлива следующая

Теорема 3.2. Для собственных функций спектральной задачи (1), (2) справедлива следующая уточненная асимптотика

$$y_k(x) = \sin \pi k x + \left(\frac{a_k}{k} + \frac{b_k}{k} \right) x \cdot \cos \pi k x - \frac{1}{2\pi k} \left(\int_0^x q(t) dt \right) \cos \pi k x + \\ + \frac{1}{2\pi k} \int_0^x q(t) \cos \pi k (x - 2t) dt + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad (19)$$

где a_k и b_k определены формулами (17).

Доказательство. Асимптотику собственных функций будем находить из (10), подставляя там вместо ρ значение ρ_k из (12).

$$y_k(x) = \sin \rho_k x - \frac{1}{2\rho} \int_0^x q(t) dt \cdot \cos \rho_k x + \frac{1}{2\rho k} \int_0^x q(t) \cos \rho_k (x - 2t) dt + O\left(\frac{1}{\rho_k^2}\right). \quad (20)$$

Предварительно получим некоторые асимптотические оценки. Все оценки будем получать с остатком $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$. Учитывая оценку (16) для δ_k , а также известные соотношения $\sin \delta = \delta + O(\delta^3)$ и $\cos \delta = 1 + O(\delta^2)$ при $\delta \rightarrow 0$, имеем следующие оценки

$$\begin{aligned} \sin \rho_k x &= \sin (\pi k + \delta_k) x = \sin \pi k x \cdot \cos \delta_k x + \cos \pi k x \cdot \sin \delta_k x = \\ &= \sin \pi k x (1 + O(\delta_k^2)) + \cos \pi k x (\delta_k x + O(\delta_k^3)) = \sin \pi k x + \delta_k x \cdot \cos \pi k x + O\left(\frac{1}{k^2}\right); \\ \cos \rho_k x &= \cos (\pi k + \delta_k) x = \cos \pi k x \cdot \cos \delta_k x - \sin \pi k x \cdot \sin \delta_k x = \\ &= \cos \pi k x (1 + O(\delta_k^2)) - \sin \pi k x (\delta_k x + O(\delta_k^3)) = \cos \pi k x - \delta_k x \cdot \sin \pi k x + O\left(\frac{1}{k^2}\right); \\ \sin \rho_k (x - 2t) &= \cos \pi k (x - 2t) - \delta_k (x - 2t) \sin \pi k (x - 2t) + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \\ \frac{1}{\rho_k} &= \frac{1}{\pi k + \delta_k} = \frac{1}{\pi k} \left(1 + O\left(\frac{\delta_k}{k}\right)\right) = \frac{1}{\pi k} + O\left(\frac{1}{k^3}\right). \end{aligned}$$

Учитывая все эти оценки в (20) и упрощая полученные выражения, получаем справедливость формулы (19). \square

4. Сопряженная спектральная задача

Непосредственно проверяется, что сопряженная задача имеет вид

$$-z'' + \overline{q(x)} z = \lambda z, \quad x \in (0, 1) \quad (21)$$

$$\begin{cases} z(1) = 0, \\ z'(1) + (\overline{a}\lambda + \overline{b}) z(0) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

Через $z(x, \rho)$ ($\lambda = \rho^2$) обозначим решение уравнения

$$-z'' + \overline{q(x)} z = \rho^2 z$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$z(1) = 0, \quad z'(1) = -\rho.$$

Функция $z(x, \rho)$ является также решением интегрального уравнения

$$z(x, \rho) = \sin \rho(1-x) + \frac{1}{\rho} \int_x^1 \overline{q(t)} z(t, \rho) \sin \rho(t-x) dt \quad (23)$$

Собственными значениями сопряженной задачи являются $\bar{\lambda}_k = \bar{\rho}_k^2$. Найдем асимптотику собственных функций

$$\begin{aligned} z_k(x) = z(x, \bar{\rho}_k) &= \sin \bar{\rho}_k(1-x) + O\left(\frac{1}{\rho_k}\right) = \sin \pi k(1-x) + O\left(\frac{1}{k}\right) = \\ &= (-1)^{k+1} \sin \pi kx + O\left(\frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

Для получения более точной асимптотики, преобразуем интегральное уравнение (23) следующим образом

$$\begin{aligned} z(x, \rho) &= \sin \rho(1-x) + \frac{1}{\rho} \int_x^1 \overline{q(t)} \left(\sin \rho(1-t) + \frac{1}{\rho} \int_t^1 \overline{q(\tau)} z(\tau, \rho) \sin \rho(\tau-t) d\tau \right) \cdot \\ &\quad \cdot \sin \rho(t-x) dt = \sin \rho(1-x) + \frac{1}{\rho} \int_x^1 \overline{q(t)} \sin \rho(1-t) \sin \rho(t-x) dt + \\ &\quad + \frac{1}{\rho^2} \int_x^1 \overline{q(t)} \left(\int_t^1 \overline{q(\tau)} z(\tau, \rho) \sin \rho(\tau-t) d\tau \right) \sin \rho(t-x) dt = \\ &= \sin \rho(1-x) - \frac{1}{2\rho} \int_x^1 \overline{q(t)} dt \cdot \cos \rho(1-x) + \frac{1}{2\rho} \int_x^1 \overline{q(t)} \cos \rho(1-2t+x) dt + \\ &\quad + \frac{1}{\rho^2} \int_x^1 \overline{q(t)} \left(\int_t^1 \overline{q(\tau)} z(\tau, \rho) \sin \rho(\tau-t) d\tau \right) \sin \rho(t-x) dt. \quad (24) \end{aligned}$$

Для решения $z(x, \rho)$ уравнение (21) справедлива аналогичная (9) оценка: $z(x, \rho) = O(e^{|Im\rho|(1-x)})$. Подставляя это в последнем слагаемом в (24) под интегралом и учитывая оценки (7), (8), получим

$$\begin{aligned} z(x, \rho) &= \sin \rho(1-x) - \frac{1}{2\rho} \int_x^1 \overline{q(t)} dt \cdot \cos \rho(1-x) + \frac{1}{2\rho} \int_x^1 \overline{q(t)} \cos \rho(1-2t+x) dt + \\ &\quad + O\left(\frac{e^{|Im\rho|(1-x)}}{|\rho^2|}\right) \quad (25) \end{aligned}$$

Подставляя $\rho = \bar{\rho}_k$,

$$\begin{aligned} z_k(x) &= \sin \bar{\rho}_k(1-x) - \frac{1}{2\bar{\rho}_k} \int_x^1 \bar{q}(t) dt \cdot \cos \bar{\rho}_k(1-x) + \\ &+ \frac{1}{2\bar{\rho}_k} \int_t^1 \bar{q}(t) \cos \rho(1-2t+x) dt + O\left(\frac{1}{\rho_k^2}\right) \end{aligned} \quad (26)$$

где $\bar{\rho}_k = \pi k + \bar{\delta}_k$; $\bar{\delta}_k = \frac{a_k}{k} + \frac{b_k}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$. Поступая аналогично, как и при получении оценки (19), имеем

$$\begin{aligned} \sin \bar{\rho}_k(1-x) &= \sin(\pi k + \bar{\delta}_k)(1-x) = \sin \pi k(1-x) \cdot \cos \bar{\delta}_k(1-x) + \\ &+ \cos \pi k(1-x) \sin \bar{\delta}_k(1-x) = \sin \pi k(1-x) + \left(\frac{\bar{a}_k + \bar{b}_k}{k}\right)(1-x) \cdot \cos \pi k(1-x) + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \\ \cos \bar{\rho}_k(1-x) &= \cos(\pi k + \bar{\delta}_k)(1-x) = \cos \pi k(1-x) \cdot \cos \bar{\delta}_k(1-x) - \\ &- \sin \pi k(1-x) \cdot \sin \bar{\delta}_k(1-x) = \cos \pi k(1-x) - \frac{\bar{a}_k + \bar{b}_k}{k}(1-x) \cdot \sin \pi k(1-x) + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \\ \cos \bar{\rho}_k(1-2t+x) &= \cos(\pi k + \bar{\delta}_k)(1+x-2t) = (-1)^k \cos(\pi k + \bar{\delta}_k)(x-2t) = \\ &= (-1)^k \cos \pi k(x-2t) - (-1)^k \frac{\bar{a}_k + \bar{b}_k}{k}(x-2t) \cdot \sin \pi k(x-2t) + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \end{aligned}$$

Учитывая полученные оценки, из (26) получим

$$\begin{aligned} z_k(x) &= \sin \pi k(1-x) + \frac{\bar{a}_k + \bar{b}_k}{k} \cos \pi k(1-x) - \\ &- \frac{1}{2\pi k} \int_x^1 \bar{q}(t) dt \cdot \cos \pi k(1-x) + \frac{(-1)^k}{2\pi k} \int_x^1 \bar{q}(t) \cos \pi k(x-2t) dt + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \end{aligned} \quad (27)$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 4.1. *Для собственных функций сопряженной спектральной задачи (21), (22) справедливы асимптотические формулы (27).*

Очевидно, что все собственные функции $z_k(x)$ сопряженной задачи (21), (22) удовлетворяют условию $z_k(0) \neq 0$. Так как, в противном случае мы получаем, что она удовлетворяет уравнению (21) и начальным условиям $z_k(1) = 0$, $z'_k(1) = 0$. Тогда она является тривиальным решением уравнения (21), т.е. $z_k(x) \equiv 0$, противоречит тому, что она является собственной функцией. Этот факт является очень важным при изучении вопроса базисности собственных функций в пространстве $L_p(0, 1)$.

В заключении автор выражает благодарность своему научному руководителю д.м.и. Т.В.Касумову (Т.В. Gasumov) за постановку задачи и за ценные советы при выполнении этой работы.

Список литературы

- [1] Аткинсон Ф.Б. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968, 749 с.
- [2] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнение математической физики. М.: Наука, 1977, 766 с.
- [3] Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения, 1997, т.33, No 1, с. 115-119.
- [4] Gomilko A.M., Pivovarchik V.N. On bases of eigenfunctions of boundary problem associated with small vibrations of damped non smooth inhomogeneous string // Asympt. Anal. 1999., v.20 No 3-4, p.301-315.
- [5] Керимов Н.Б., Мирзоев В.С. О базисных свойствах одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Сиб. мат. журн. 2003, т.44, No 5, с.1041-1045.
- [6] Kerimov N.B., Poladov R.G. On basicity in of the system of eigenfunctions of one boundary value problem II // Proc. IMM NAS Azerb., 2005, v.23, p. 65-76.
- [7] Керимов Н.Б., Алиев З.С. О базисных свойствах собственных функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Докл. РАН, 2007, т.412, No 1, с. 18-21.
- [8] Marchenkov D.B. On the convergence of spectral expansions of functions for problems with a spectral parameter in a boundary condition// Differential Equations, 2005, vol. 41, No. 10, pp. 1496-1500.
- [9] Marchenkov D.B. Basis property of the system of eigenfunctions corresponding to a problem with a spectral parameter in the boundary condition// Differential Equations, 2006, vol. 42, No. 6, pp. 905-908.
- [10] Gasymov T.B., Mammadova Sh.J. On convergence of spectral expansions for one discontinuous problem with spectral parameter in the boundary condition // Trans. Of NAS of Azerb. 2006,vol. XXVI, No 4, p. 103-116.
- [11] Gasymov T.B., Huseynli A.A. The basis properties of eigenfunctions of a discontinuous differential operator with a spectral parameter in boundary condition // Proc. of IMM of NAS of Azerb. vol. XXXV(XLIII), 2011, pp. 21-32.
- [12] Shahriari M., Akbarfam J.A., Teschl G. Uniqueness for inverse Sturm-Liouville problems with a finite number of transmission conditions. J.Math. Anal. Appl. 395. 19-29(2012).

- [13] Shahriari M. Inverse Sturm-Liouville Problem with Eigenparameter Dependent Boundary and Transmission Conditions. *Azerb. J. Math.*, 4(2) (2014), 16-30.
- [14] Kerimov N.B., Maris E.A. On the basis properties and convergence of expansions in terms of eigenfunctions for a spectral problem with a spectral parameter in the boundary condition // *Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan*, 2014, v.40, Special Issue, pp. 245-258.
- [15] Bilalov B.T., Gasymov T.B. On bases for direct decomposition. *Doklady Mathematics*. 93(2) (2016).pp 183-185.
- [16] Bilalov B.T., Gasymov T.B. On basicity a system of eigenfunctions of second order discontinuous differential operator // *Ufa Mathematical Journal*, 2017, v. 9, No 1, p.109-122.
- [17] Магеррамова Г.В. О полноте собственных функций одного дифференциального оператора второго порядка, *Journal of Contemporary Applied Mathematics*, v.8, No 2, 2018, с.45-55.
- [18] Gasymov T.B., G.V. Maharramova. The stability of the basis properties of multiple systems in a Banach space with respect to certain transformations // *Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics*. V. 6, No 2, 2018, December, p. 66-77.
- [19] Gasymov T.B, Maharramova G.V., Mammadova N.G. Spectral properties of a problem of vibrations of a loaded string in Lebesgue spaces. *Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics*, 38(1), 62-68(2018), Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences.
- [20] Gasymov T.B, Maharramova G.V., Jabrailova A.N. Spectral properties of the problem of vibration of a loaded string in Morrey type spaces. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan*, Volume 44, Number 1, 2018, Pages 116-122.
- [21] Билалов Б.Т., Касумов Т.Б., Магеррамова Г.В. О базисности собственных функций одной спектральной задачи с точкой разрыва в лебеговых пространствах, *Дифференц. уравнения*, 2019, т.55, № 12, с. 1-10.
- [22] Maharramova G.V. Properties of Eigenvalues and Eigenfunctions of a Spectral Problem with Discontinuity Point // *Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics* V. 7, No 1, 2019, July, pp.114-125.
- [23] Касумов Т.Б., Магеррамова Г.В., Касимов Т.Ф. О полноте и минимальности собственных функций одной спектральной задачи в пространствах $L_p \oplus C$ и L_p // *Journal of Contemporary Applied Mathematics*, v.10, No2, 2020, с.85-100.

- [24] T.B.Gasymov, A.M.Akhtyamov, N.R.Ahmedzade. On the basicity of eigenfunctions of a second-order differential operator with a discontinuity point in weighted lebesgue spaces // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, Volume 46, Number 1, 2020, Pages 32–44.
- [25] Levitan B.M., Sargsjan I.S. Introduction to spectral theory//Amer. Math. Soc.,1975
- [26] Маркушевич А.И. Теория аналитических функции. Т. I, Москва, Наука, 1967

Гасымов Т.Ф.

Азербайджанский Технологический Университет, Ганджа, Азербайджан

E-mail: tehransened@mail.ru

Received 05 January 2021

Accepted 26 June 2021