Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 7, No 1, 2017, June
ISSN 2222-5498

Об одной краевой задаче для операторно-дифференциального уравнения четвертого порядка на полуоси

Калемкуш У.О.

Аннотация. В работе получены условия на коэффициенты операторно-дифференциального уравнения в сепарабельном гильбертовом пространстве, которые обеспечивают корректную разрешимость одного класса краевых задач на полуоси.

Key Words and Phrases: гильбертово пространство, операторно-дифференциальное уравнение, граничная задача, регулярное решение.

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H начально краевую задачу

$$u^{(4)}(t) + g(t) A^4 u(t) + \sum_{j=0}^{4} A_{4-j} u^{(j)}(t) = f(t), \ t \in (0, \infty), \tag{1}$$

$$u(0) = u''(0) = 0, \tag{2}$$

где $f(t)$, $u(t)$ функции определенные в интервале $R_+ = (0, \infty)$ почти всюду со значениями в H, производные понимаются в смысле теории распределений, а операторные коэффициенты удовлетворяют условиям

1) $A-$положительно определенный самосопряженный оператор в H с областью определения $D(A)$;

2) Скалярная функция $g(t)$ определена на интервале $R_+ = (0, \infty)$ почти всюду, измерима, ограничена, причем $0 < \alpha \leq g(t) \leq \beta < \infty$;

3) Операторы $B_j = A_j A^{-j}$ $\left(j = \overline{0,4}\right)$ ограничены в H.

Отметим, что при выполнение условие 1) область определения оператора A^γ, т.е. $D(A^\gamma)$ превращается в гильбертово пространство H_γ относительно скалярного произведения $(x, y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y)$, $x, y \in D(A^\gamma)$, $\gamma \geq 0$. При $\gamma = 0$ считаем, что $H_0 = H$.

Пусть $L_2(R_+; H)$ есть гильбертово пространство всех функций $f(t)$ определенные в $R_+ = (0, \infty)$ почти всюду, со значениями в H, измеримых и квадратично интегрируемых по Бохнеру функций с нормой

 © 2011 JCAM All rights reserved.

$$\|f\|_{L_2(R_+;H)} = \left(\int_0^1 \|f(t)\|^2\, dt\right)^{1/2} < \infty.$$

Далее, следуя монографию [1] определим гильбертово пространство

$$W_2^4(R_+;H) = \left\{u : u^{(4)} \in L_2(R_+;H), A^4 u \in L_2(R_+;H)\right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^4(R_+;H)} = \left(\left\|u^{(4)}\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\|A^4 u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}\right)^{1/2}.$$

Очевидно, что линейное множество [1]

$$\overset{\circ}{W}{}_2^4(R_+;H) = \left\{u : u \in W_2^4(R_+;H), u(0) = u''(0) = 0\right\}$$

есть полное гильбертово пространство.

Определение 0.1. Если при любом $f(t) \in L_2(R_+;H)$ существует функция $u(t) \in W_2^4(R_+;H)$ удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду в $R_+ = (0,\infty)$, граничным условиям (2) в смысле сходимости

$$\lim_{t\to+0}\|u(t)\|_{7/2} = 0, \lim_{t\to+0}\left\|u''(t)\right\|_{3/2} = 0,$$

и имеет место оценка

$$\|u\|_{W_2^4(R_+;H)} \le const\ \|f\|_{L_2(R_+;H)},$$

то задача (1),(2) называется регулярно разрешим.

В данной работе мы найдем условия на коэффициенты уравнения (1), которые обеспечивают регулярно разрешимости задачи (1) , (2).

Отметим, что при $g(t) = 1$ задача исследована в работе [2]. Когда $g(t)$ принимает двум значениям, т.е. $g(t) = \alpha$, при $0 \le t < t_0$ и $g(t) = \beta$, $t > t_0$ задача исследована в работах [3, 4].

В данной работе от функции $g(t)$ требуется только ограниченность и положительность. В работе [5] исследована другая краевая задача для уравнения (1).

Обозначим через

$$P_0 u = P_0(d/dt)\, u(t), = u^{(4)}(t) + g(t) A^4 u(t), u \in \overset{\circ}{W}{}_2^4(R_+;H),$$

$$P_1 u = P_1(d/dt)\, u(t), = \sum_{j=0}^{4} A_{4-j} u(t), u \in \overset{\circ}{W}{}_2^4(R_+;H).$$

Сперва докажем следующую теорему.

Теорема 0.1. *Оператор P_0 изоморфно отображает пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^4(R_+;H)$ на $L_2(R_+;H)$.*

Доказательство. Рассмотрим в пространстве $L_2(R_+;H)$ оператор L_0 порожденный , операторно-дифференциальном выражением $P_0(d/dt)\,u(t)\,, = \; u^{(4)}(t) + g(t)\,A^4u(t)$ с областью определения $\overset{\circ}{W}{}_2^4(R_+;H) \subset L_2(R_+;H)$. Очевидно, что оператор L_0 есть самосопряженный оператор в $L_2(R_+;H)$. С другой стороны неравенства

$$(L_0u,u)_{L_2(R_+;H)} = \int_0^\infty \left(u^{(4)} + g(t)\,A^4u, u\right)dt =$$
$$= \int_0^\infty \left\|u''(t)\right\|^2 dt + \int_0^\infty g(t)\left\|A^2u\right\|^2 dt \ge \alpha\mu_0^4\left\|u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}\,, \qquad (3)$$

показывает, что L_0 есть положительно определенный самосопряженный оператор. Здесь μ_0 есть нижная граничa спектра оператора A. Тогда уравнение $L_0u = f$ имеет решение $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^4(R_+;H)$ при любом $f \in L_2(R_+;H)$. Следовательно уравнение $P_0u = f$ имеет решение при любом $f \in L_2(R_+;H)$. С другой стороны уравнение $P_0u = 0$ имеет единственное нулевое регулярное решение (см. неравенству (3)). Так как

$$\|P_0u\|_{L_2(R_+;H)} \le const\,\|u\|_{W_2^4(R_+;H)}\,,$$

то утверждение теоремы следует из теоремы Банаха об обратном операторе.

Теперь оценим нормы операторов промежуточных производных.

Теорема 0.2. *При всех $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^4(R_+;H)$ имеет места неравенства*

$$\left\|A^{4-j}u^{(j)}\right\|_{L_2(R_+;H)} \le c_j(\alpha,\beta)\,\|P_0u\|_{L_2(R_+;H)}\ \ ,\ j=\overline{0,4}, \qquad (4)$$

где $c_0(\alpha,\beta) = \alpha^{-1}$, $c_1(\alpha,\beta) = 2^{-1/2}\alpha^{-3/4}$, $c_2(\alpha,\beta) = 2^{-1}\alpha^{-1/2}$, $c_3(\alpha,\beta) = 2^{-1/2}\alpha^{-1/2}\beta^{1/4}$, $c_4(\alpha,\beta) = \alpha^{-1/2}\beta^{1/2}$.

Доказательство. Очевидно, что при $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^4(R_+;H)$

$$\left\|g^{-1/2}P_0u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \left\|g^{-1/2}u^{(4)} + g^{1/2}A^4u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \left\|g^{-1/2}u^{(4)}\right\|^2 +$$
$$+\left\|g^{1/2}A^4u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + 2Re\left(u^{(4)}, A^4u\right)_{L_2(R_+;H)}.$$

С помощью интегрированием по частям имеем

$$\left(u^{(4)}, A^4u\right)_{L_2(R_+;H)} = 2\left(A^2u'', A^2u''\right)_{L_2(R_+;H)} = 2\left\|A^2u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}.$$

Таким образом

$$\left\| g^{-1/2}P_0u \right\|_{L_2(R_+;H)} = \left\| g^{-1/2}u^{(4)} \right\|^2_{L_2(R_+;H)} + 2\left\| A^2u'' \right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\| g^{-1/2}A^4u \right\|^2_{L_2(R_+;H)}.$$

С другой стороны

$$\left\| A^2u'' \right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \int_0^\infty \left(A^2u''(t), A^2u''(t) \right) dt = \int_0^\infty \left(A^4u(t), u^{(4)}(t) \right) dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(g^{1/2}(t)\, A^4u(t), g^{-1/2}(t)\, u^{(4)}(t) \right) dt \le \left\| g^{1/2}A^4u \right\|^2_{L_2(R_+;H)} \left\| g^{-1/2}u^{(4)} \right\|^2_{L_2(R_+;H)} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\left\| g^{-1/2}u^4 \right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\| g^{1/2}A^4u \right\|^2_{L_2(R_+;H)} \right). \tag{5}$$

Учитывая здесь неравенство (5), получаем

$$\left\| A^2u'' \right\|^2_{L_2(R_+;H)} \le \frac{1}{2}\left(\left\| g^{-1/2}P_0u \right\|^2_{L_2(R_+;H)} - 2\left\| A^2u'' \right\|^2_{L_2(R_+;H)} \right),$$

т.е.

$$\left\| A^2u'' \right\|^2_{L_2(R_+;H)} \le \frac{1}{4}\left\| g^{-1/2}P_0u \right\|^2_{L_2(R_+;H)} \le \frac{1}{4\alpha}\left\| P_0u \right\|^2_{L_2(R_+;H)}.$$

Следовательно

$$\left\| A^2u'' \right\|_{L_2(R_+;H)} \le \frac{1}{2}\alpha^{-1/2}\left\| P_0u \right\|_{L_2(R_+;H)},$$

т.е. неравенство (4) верно при $j = 2$. С другой стороны из равенства (5) следует, что

$$\left\| u^{(4)} \right\|_{L_2(R_+;H)} \le \beta^{1/2}\left\| g^{-1/2}u^{(4)} \right\|_{L_2(R_+;H)} \le$$

$$\le \beta^{1/2}\left\| g^{-1/2}P_0u \right\|_{L_2(R_+;H)} \le \alpha^{-1/2}\beta^{1/2}\left\| P_0u \right\|_{L_2(R_+;H)},$$

т.е. неравенство (4) верно и при $j = 4$. Аналогично имеем

$$\left\| A^4u \right\|_{L_2(R_+;H)} \le \alpha^{-1/2}\left\| g^{1/2}A^4u \right\|_{L_2(R_+;H)} \le$$

$$\le \alpha^{-1/2}\left\| g^{-1/2}P_0u \right\|_{L_2(R_+;H)} \le \alpha^{-1/2}\left\| P_0u \right\|_{L_2(R_+;H)}.$$

Т.е. получили верность неравенства (4) при $j = 0$. Теперь рассмотрим случай $j = 1$ и $j = 3$.

Так как при $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^4(R_+;H)$ имеет место следующие неравенства

$$\left\| A^3u' \right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \int_0^\infty \left(A^3u'(t), A^3u'(t) \right) dt =$$

$$= -\left(A^4 u\left(t\right), A^3 u''\left(t\right)\right)_{L_2(R_+;H)} \leq \left\|A^4 u\right\|_{L_2(R_+;H)} \left\|A^2 u''\right\|_{L_2(R_+;H)}.$$

Используя доказанные неравенства (4) при $j = 0$ и $j = 2$ имеем

$$\left\|A^3 u'\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \leq \alpha^{-3/2} \frac{1}{2} \left\|P_0 u\right\|^2_{L_2(R_+;H)},$$

т.е.

$$\left\|A^3 u'\right\|_{L_2(R_+;H)} \leq 2^{-1/2} \alpha^{-3/4} \left\|P_0 u\right\|_{L_2(R_+;H)}.$$

Аналогично имеем

$$\left\|A u'''\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \leq \left\|u^{(4)}\right\|_{L_2(R_+;H)} \left\|A^2 u''\right\|_{L_2(R_+;H)} \leq$$

$$\leq \beta^{1/2} \alpha^{-1/2} \left\|P_0 u\right\|_{L_2(R_+;H)} 2^{-1} \alpha^{-1/2} \left\|P_0 u\right\|_{L_2(R_+;H)} =$$

$$= 2^{-1} \beta^{1/2} \alpha^{-1} \left\|P_0 u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}.$$

Тогда получаем, что

$$\left\|A u'''\right\|_{L_2(R_+;H)} \leq 2^{-1/2} \beta^{1/4} \alpha^{-1/2} \left\|P_0 u\right\|_{L_2(R_+;H)}.$$

Теорема доказана.

Теперь докажем основную теорему.

Теорема 0.3. *Пусть выполняются условия 1)-3) и имеет место неравенство*

$$q\left(\alpha, \beta\right) = \sum_{j=0}^{4} c_j\left(\alpha, \beta\right) \left\|B_{4-j}\right\| < 1,$$

где числа $c_j\left(\alpha, \beta\right)$ *определены из Теоремы 0.2. Тогда задача* (1), (2) *регулярно разрешимо.*

Доказательство. Определим в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^4\left(R_+; H\right)$ оператор

$$Pu = P_0 u + P_1 u$$

где

$$P_0 u = u^{(4)} + A^4 u, P_1 u = \sum_{j=0}^{4} A_{4-j} u^{(j)}, u \in \overset{\circ}{W}{}_2^4\left(R_+; H\right).$$

Тогда задача (1), (2) можно записать в виде

$$P_0 u + P_1 u = f.$$

Так, как по Теореме 0.1, P_0 есть изоморфизм между пространствами $\overset{\circ}{W}{}_2^4(R_+;H)$ и $L_2(R_+;H)$, то после замены $P_0u=\omega$ получаем уравнению $\left(E+P_1P^{-1}\right)\omega=f$. Так как при любом $\omega\in L_2(R_+;H)$ с учетам Теорему 0.2 получаем:

$$\left\|P_1P_0^{-1}\omega\right\|_{L_2(R_+;H)}=\left\|P_1u\right\|_{L_2(R_+;H)}\le\sum_{j=0}^{4}\left\|B_{4-j}\right\|\left\|A^{4-j}u^{(j)}\right\|\le$$

$$\left(\sum_{j=0}^{4}c_j(\alpha,\beta)\left\|B_{4-j}\right\|\right)\left\|P_0u\right\|_{L_2(R_+;H)}=q(\alpha,\beta)\left\|\omega\right\|_{L_2(R_+;H)}.$$

Так как $q(\alpha,\beta)<1$, то $E+P_1P_0^{-1}$ обратим в $L_2(R_+;H)$. Поэтому

$$u=P_0^{-1}\left(E+P_1P_0^{-1}\right)^{-1}f$$

и

$$\left\|u\right\|_{W_2^4(R_+;H)}\le const\left\|f\right\|_{L_2(R_+;H)}.$$

Теорема доказана.

Список литературы

[1] Лионс Ж.Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, М., Мир, 1971, 371 с.

[2] Мирзоев С.С. *Условия разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений*, ДАН СССР, **273(2)**, 1983, 292-295.

[3] Алиев А.Р. *О регулярных решениях одного класса операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка*, Вестник Бакинского Университета, сер. физ. мат. наук, **4**, 2006, 26-35.

[4] Алиев А.Р., Мирзоев С.С. *К теории разрешимости краевых задач для одного класса операторно-дифференциальное уравнений высокого порядка*, Функциональный анализ и его приложения, **444(33)**, 2010, 63-65.

[5] Mirzoyev S.S., Kalemkuş, *On the solvability of a boundary value problem of fourth order in Hilbert spaces*, Applied Mat. Sciences,**9(128)**, 2015, 6391-6395.

Умут О. Калемкуш
Нахичеванский Государственный Университет, Азербайджанская Республика, город Нахичевань, Университетский городок, AZ7012
Email:

Received 20 May 2017
Accepted 15 June 2017