Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 7, No 1, 2017, June
ISSN 2222-5498

Интегральное Уравнение с Запаздывающим Аргументом в Процессах Полумарковского Блуждания

Т.И.Насирова, Э.М.Нейманов, У.Я.Керимова

Аннотация. Пользуясь последовательностью независимых случайных величин построено разностный процесс полумарковского блуждания. Найдено преобразование Лапласа распределения длительности времени пребывания разностного процесса полумарковского блуждания.

Key Words and Phrases: случайная величина, процесс полумарковского блуждания, преобразование Лапласа.

---

1. Введение

Исследованию преобразования Лапласа распределения длительности времени пребывания случайных процессов посвящено не так много работ. В работе [1,с. 61-63] исследовано асимптотическое поведение случайных блужданий в случайной среде задерживающим экраном. В [2,с. 160-165] изучено случайное блуждание в полосе. В работе [3,с. 26-51] найдено асимптотическое разложение распределения определенных на Марковских цепях. В работе [4,с. 61-63] исследованы разновидные полумарковские процессы с задерживающим экраном и функционалы от этих процессов. В [5, с.77-84] найдено преобразование Лапласа распределения нижнего граничного функционала процесса полумарковского блуждания с задерживающим экраном в нуле. В [6,с. 49-60] найдено преобразование Лапласа эргодического распределения процесса полумарковского блуждания с отрицательным сносом, неотрицательными скачками и задерживающим экраном в нуле.

В данной работе найдено преобразование Лапласа распределения длительности времени пребывания разностного процесса полумарковского блуждания

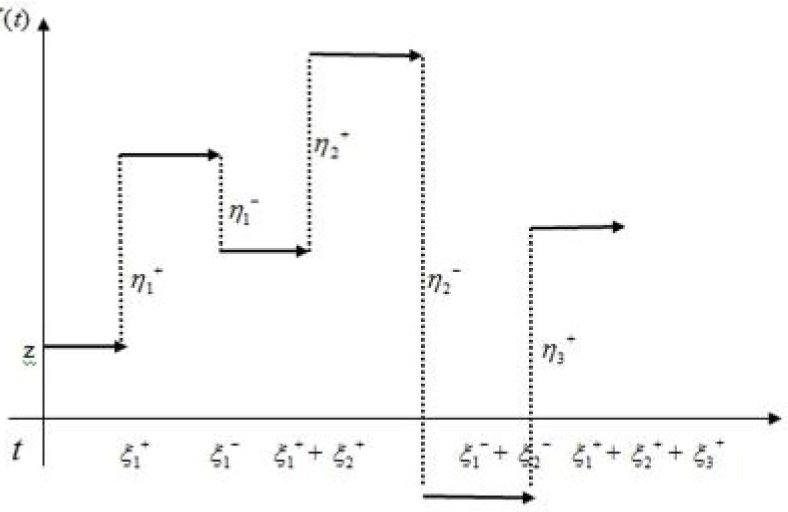
2. Описание процесса

Пусть на вероятностном пространстве заданы две независимых одинокого распределенных случайных величин последовательности
$\left\{\xi_k^+,\eta_k^+\right\}_{k=1,\infty}$ и $\left\{\xi_k^-,\eta_k^-\right\}_{k=1,\infty}$, пары в каждой последовательности независимо и $\xi_k^\pm>0$, $\eta_k^\pm>0$. По этим случайным величинам построим следующие процессы полумарковского блуждания
$\mathrm{X}^+(t)=\sum_{i=1}^{k-1}\eta_i^+\mathrm{X}^+(t)=\sum_{i=1}^{k-1}\eta_i^+$, если $\sum_{i=1}^{k-1}\xi_i^+\le t<\sum_{i=1}^{k}\xi_i^+$
, $\mathrm{X}^-(t)=\sum_{i=1}^{k-1}\eta_i^-$, если $\sum_{i=1}^{k-1}\xi_i^-\le t<\sum_{i=1}^{k}\xi_i^-$.

Процесс

$$\mathrm{X}(t) = \mathrm{X}^{+}(t) - \mathrm{X}^{-}(t) \qquad (1)$$

назовчм разностным процессом полумарковского блуждания.
Одна из его реализаций будет следующая



Цель в статье найти преобразование Лапласа распределения длительности времени пребывания процесса (1)
Предполагаем, что случайная величина ξ_1^{+} распределена по экспоненциальному закону. Тогда $\mathrm{X}(t)$ становится сложным разностным Марковским процессом

3. Постановка задачи

Пусть процесс $\mathrm{X}(t)$ функционирует в полосе [b , a] , a>0, b>0.
Обозначим
$\mathrm{A}_z = \left\{ \inf\limits_{0\le s\le t} X(s) > b; \sup\limits_{0\le s\le t} X(s) < a | X(0) = z \right\}$, z>0
и

$$\mathrm{K}(t; b, a | X(0) = z) = \mathrm{P}\left\{ \inf_{0\le s\le t} X(s) > b; \sup_{0\le s\le t} X(s) < a | X(0) = z \right\}. \qquad (2)$$

Обе части этого равенства умножим на $e^{-\theta t}, \theta > 0, t > 0$ и проинтегрируем по t

$$\tilde{\mathrm{K}}(\theta; b, a | X(0) = z) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} \mathrm{P}\left\{ \inf_{0\le s\le t} X(s) > b; \sup_{0\le s\le t} X(s) < a | X(0) = z \right\} dt.$$

Событие A_z происходит при следующих пяти гипотезах

$$\mathrm{H}_1 = \left\{ \xi_1^{+} > t; \xi_1^{-} > t \right\},$$

$$\mathrm{H}_2 = \left\{ \xi_1^{+} < \xi_1^{-} < t \right\},$$

$$\mathrm{H}_3 = \left\{\xi_1^+ < t < \xi_1^-\right\},$$

$$\mathrm{H}_4 = \left\{\xi_1^- < \xi_1^+ < t\right\},$$

$$\mathrm{H}_5 = \left\{\xi_1^- < t < \xi_1^+\right\},$$

Для краткости обозначим
$\mathrm{K}(t;b,a|X(0)=z)$=K(t|z)
Тогда имеем

$$K(t|z) = P(A_z \bigcup_{i=1}^{5} \mathrm{H}_i) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_z\mathrm{H}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_z\mathrm{H}_2) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_z\mathrm{H}_3) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_z\mathrm{H}_4) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_z\mathrm{H}_5)$$

$$= P\left\{\xi_1^+ > t; \xi_1^- > t | X(0) = z\right\}$$

$$+ \int_{y=b}^{a}\int_{s=0}^{t} P\left\{\xi_1^+ < s; \xi_1^- \in ds; X(s) \in dy | X(0) = z\right\}\ K(t-s;|y)$$

$$+ \int_{y=b}^{a}\int_{s=0}^{t} P\left\{\xi_1^+ < ds; \xi_1^- > t; X(s) \in dy | X(0) = z\right\}\ K(t-s;|y)$$

$$+ \int_{y=b}^{a}\int_{s=0}^{t} P\left\{\xi_1^- < s; \xi_1^+ \in ds; X(s) \in dy | X(0) = z\right\}\ K(t-s;|y)$$

$$+ \int_{y=b}^{a}\int_{s=0}^{t} P\left\{\xi_1^- \in ds; \xi_1^+ > t; X(s) \in dy | X(0) = z\right\}\ K(t-s;|y).$$

Учитывая порядок моментов скачков, т.е. $\xi_1^+ > \xi_1^-$ и $\xi_1^+ < \xi_1^-$ имеем

$$K(t|z) = P\left\{\xi_1^+ > t;\right\} P\left\{\xi_1^- > t\right\}$$

$$+ \int_{y=b}^{a}\int_{s=0}^{t} P\left\{\xi_1^+ < s; \xi_1^- \in ds; X(s) \in dy | X(0) = z\right\}\ K(t-s|y)$$

$$+ P\left\{\xi_1^- > t\right\} \int_{y=b}^{a}\int_{s=0}^{t} P\left\{\xi_1^+ < ds; X(s) \in dy | X(0) = z\right\}\ K(t-s|y)$$

$$+ \int_{y=b}^{a}\int_{s=0}^{t} P\left\{\xi_1^- < s; \xi_1^+ \in ds; X(s) \in dy | X(0) = z\right\}\ K(t-s|y)$$

$$+ P\left\{\xi_1^+ > t;\right\} \int_{y=b}^{a}\int_{s=0}^{t} P\left\{\xi_1^- \in ds; X(s) \in dy | X(0) = z\right\}\ K(t-s|y).$$

Упростим уравнение (2)

$$K(t|z) = P\left\{\xi_1^+ > t;\right\} P\left\{\xi_1^- > t\right\}$$

$$+\int_{y=b}^{a}\int_{s=0}^{t} P\left\{\xi_1^+ < s; \xi_1^- \in ds; \max[\min(a; z+X^+(s)-\eta_1^-; b] \in dy\right\}\ K(t-s;|y)$$

$$+P\left\{\xi_1^- > t\right\}\int_{y=b}^{a}\int_{s=0}^{t} P\left\{\xi_1^+ \in ds; \min(a; z+\eta_1^+) \in dy|\right\}\ K(t-s;|y)$$

$$+\int_{y=b}^{a}\int_{s=0}^{t} P\left\{\xi_1^- < s; \xi_1^+ \in ds; \min[\max(b; z-X^-(s))+\eta_1^+), a] \in dy\right\}\ K(t-s;|y)$$

$$+P\left\{\xi_1^+ > t\right\}\int_{y=b}^{a}\int_{s=0}^{t} P\left\{\xi_1^- \in ds; \max(b; z-\eta_1^-) \in dy\right\}\ K(t-s;|y)$$

Учитывая порядок моментов скачков, т.е. $\xi_1^+ > \xi_1^-$ и $\xi_1^+ < \xi_1^-$ имеем

$$K(t|z) = P\left\{\xi_1^+ > t;\right\} P\left\{\xi_1^- > t\right\}$$

$$+P\left\{\xi_1^- > t\right\}\int_{y=b}^{a}\int_{s=0}^{t} d_y P\left\{\xi_1^+ \in ds; \min(a; z+\eta_1^+) < y\right\}\ K(t-s;|y)$$

$$+\int_{y=b}^{a}\int_{s=0}^{t} d_y P\left\{\xi_1^- < s; \xi_1^+ \in ds; \min[\max(b; z-X^-(s))+\eta_1^+), a] < y\right\}\ K(t-s;|y)$$

$$+P\left\{\xi_1^+ > t;\right\}\int_{y=b}^{a}\int_{s=0}^{t} d_y P\left\{\xi_1^- \in ds; \max(b; z-\eta_1^-) < y\right\}\ K(t-s;|y)$$

Так как случайные процессы $\mathrm{X}^+(t)$ и $\mathrm{X}^-(t)$ независимы от случайных величин ξ_1^+ и ξ_1^-соответственно, по формуле полной вероятности получим,

$$P\left\{\xi_1^- < s\right\} = P\left\{\xi_1^- < s; \min[\max(b; z-X^-(s))] + \eta_1^+; a] < y\right\}$$

$$+P\left\{\xi_1^- < s; \min[\max(b; z-X^-(s))] + \eta_1^+; a] > y\right\}.$$

Наконец,получим разностное интегральное уравнение для $\tilde{\mathrm{K}}(\theta/y)$

$$\tilde{\mathrm{K}}(\theta/z) = \frac{1}{\lambda_+ + \lambda_- + \theta} - \frac{\lambda_+\lambda_-\mu_-}{(\lambda_+ + \theta)\theta} e^{-\mu_- a}\int_{y=b}^{a}\tilde{\mathrm{K}}(\theta|y)e^{\mu_- y}dy$$

$$+\frac{\lambda_+\lambda_-\mu_-}{(\lambda_+ + \theta)(\lambda_- + \theta)} e^{-\frac{\lambda_+\mu_+ + (\mu_+ + \mu_-)\theta}{\lambda_- + \theta}a} e^{\frac{\mu_+ + \theta}{\lambda_+ + \theta}z}\int_{y=b}^{a}\tilde{\mathrm{K}}(\theta|y)e^{\mu_- y}dy$$

$$+\frac{\lambda_+\lambda_-\mu_+\mu_-}{(\lambda_+ + \theta)(\lambda_- + \theta)} e^{\frac{\mu_+ + \theta}{\lambda_+ + \theta}z}\int_{y=z}^{a}\tilde{\mathrm{K}}(\theta|y)e^{-\frac{\mu_+ + \theta}{\lambda_+ + \theta}y}\int_{x=0}^{a-y} e^{-\frac{[(\lambda_+ + \theta)\mu_- + \mu_+ \theta]}{\lambda_+ + \theta}x}dxdy$$

$$-\frac{\lambda_+\lambda_-\mu_+\mu_-}{(\lambda_+ + \theta)(\lambda_- + \theta)} e^{\frac{\mu_+ + \theta}{\lambda_+ + \theta}z}\int_{y=b}^{z}\tilde{\mathrm{K}}(\theta|y)e^{-\frac{\mu_+ + \theta}{\lambda_+ + \theta}y}\int_{x=z-y}^{a-y} e^{-\frac{[(\lambda_+ + \theta)\mu_- + \mu_+ \theta]}{\lambda_+ + \theta}x}dxdy$$

$$-\tfrac{\lambda_+\lambda_-\mu_+}{(\lambda_-+\theta)\theta}e^{\mu_+ b}\int_{y=b}^{a}\tilde{\mathrm{K}}(\theta|y)e^{-\mu_+ y}dy$$
$$+\tfrac{\lambda_+\lambda_-\mu_+}{(\lambda_++\theta)(\lambda_-+\theta)}e^{\frac{\lambda_-\mu_++(\mu_++\mu_-)\theta}{\lambda_-+\theta}b}e^{\frac{\mu_-\theta}{\lambda_-+\theta}z}\int_{y=b}^{a}\tilde{\mathrm{K}}(\theta|y)e^{-\mu_+ y}dy$$

$$+\frac{\lambda_+\lambda_-\mu_+}{(\lambda_++\theta)(\lambda_-+\theta)}e^{\frac{\mu_-\theta}{\lambda_-+\theta}z}\int_{y=b}^{z}\tilde{\mathrm{K}}(\theta|y)e^{-\frac{\mu_-\theta}{\lambda_-+\theta}y}\int_{x=0}^{y-z}e^{-\frac{[(\lambda_-+\theta)\mu_++\mu_-\theta]}{\lambda_-+\theta}x}dxdy$$

$$+\frac{\lambda_+\lambda_-\mu_+}{(\lambda_++\theta)(\lambda_-+\theta)}e^{\frac{\mu_-\theta}{\lambda_-+\theta}z}\int_{y=b}^{a}\tilde{\mathrm{K}}(\theta|y)e^{-\frac{\mu_-\theta}{\lambda_-+\theta}y}\int_{x=y-z}^{y-b}e^{-\frac{[(\lambda_-+\theta)\mu_++\mu_-\theta]}{\lambda_-+\theta}x}dxdy$$

$$+\frac{\lambda_+\mu_+}{\lambda_++\lambda_-+\theta}e^{-\mu_+ z}\int_{y=z}^{a}\tilde{\mathrm{K}}(\lambda_-+\theta|y)e^{-\mu_+ y}dy+$$

$$+\frac{\lambda_-\mu_-}{\lambda_++\lambda_-+\theta}e^{-\mu_- z}\int_{y=b}^{z}\tilde{\mathrm{K}}(\lambda_++\theta|y)e^{\mu_- y}dy.$$

Из этого интегрального уравнения можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение.

4. Заключение

Пользуясь последовательностью независимых случайных величин построено разностный процесс полумарковского блуждания. Найдено преобразование Лапласа распределения длительности времени пребывания разностного процесса полумарковского блуждания.

Список литературы

[1] Бусаров В.А. Об асимптотическом поведение случайных блужданий в случайной среде с задерживающим экраном. Вест. МГУ. Сер 1.2004, No.5, 61-63 Библ.2 Рус.

[2] .В.И.Лотов. О случайных блужданиях в полосе. Теория вероятностей и ее применение, 1991, т.36, вып.1, с.160-165.

[3] Lotov, V.I. (1991). On the asymptotic of distributions in the sited boundary problems for random walks defined a Markov chain. Sib.Math., 1(3), 26-51.

[4] Т.И.Насирова. Процессы полумарковского блуждания. Баку, Элм, 1984, 165 стр.

Т.И.Насирова
Бакинский Государственный Университет

Е.М.Нейманов
средняя школа по имени Э.Исмайылов
*E-mail:*eneymanov@inbox.ru

У.Я.Керимова
Бакинский Государственный Университет
*E-mail:*ulviyye_kerimova@yahoo.com

Received 20 February 2017
Accepted 22 March 2017