

К вопросу об исследовании коэффициентов Фурье функции многих переменных

Мамедова Н.Р., Азизова Р.Г.

Аннотация. We study the behavior of the Fourier coefficient of function of several variables on the basis of the Fourier coefficient of other functions related to certain conditions.

Key Words and Phrases: Fourier transform, Holder inequality

2000 Mathematics Subject Classifications: 42B05

Обозначим через T^k основной k - мерный куб

$$T^k = \{x \in R^k; -\pi \leq x_i \leq \pi, i = 1, 2, \dots, k\}.$$

Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ интегрируемая и 2π -периодическая функция по каждой переменной. Каждой функции $f(x) \in L_1(T^k)$ сопоставим ее ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{n_1}^{\infty} \dots \sum_{n_k}^{\infty} c_{n_1 \dots n_k} e^{i(n_1 x_1 + \dots + n_k x_k)} = \sum c_N e^{i(N, x)} \quad (1)$$

с коэффициентами Фурье

$$c_N = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{T^k} f(x) e^{-i(N, x)} dx.$$

Полагая $A_n(x) = \sum_{|N|^2=n} c_N e^{i(N, x)}$ разложение (1) можно представить в следующей форме:

$$f(x) \sim \sum_{n_1}^{\infty} A_n(x).$$

Функция $f(x, t)$ определяемая равенством

$$f(x, t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} \int_{\Sigma} f(x_1 + t\xi_1, \dots, x_k + t\xi_k) d \sum_{\xi},$$

где $\sum : \xi_1^2 + \dots + \xi_k^2 = 1$ единичная сфера, $d\sum_\xi - (k-1)$ мерный элемент объема, $\Gamma(k, 2)$ - гамма функция Эйлера, называется сферической средней функции $f(x)$ по сфере с радиусом t и центром в точке $x \in R^k$. Имея ввиду разложение (1) можно показать, что

$$f(x, t) \sim \sum_{n \in z^k} c_N \alpha_\mu(t |N|) e^{i(N, x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_\mu \left(t n^{\frac{1}{2}} \right) A_n(x),$$

где $\mu = \frac{k-2}{2}$, $\alpha_\mu = \frac{J_\mu(x)}{x^\mu}$, $J_\mu(x)$ - функция Бесселя. Функция $\alpha_\mu(x)$ обладает следующими свойствами ([4], стр.37).

Лемма. Для некоторого $u > 0$ и соответствующей ему постоянной $b(u) > 0$, справедливо неравенство $b(u) < 1 - \alpha_\mu(x) < 2$ для $x > u$.

Кроме того

$$1 - \alpha_\mu(x) > \frac{x^2}{\pi^2(\mu+1)} \text{ при } 0 > x > \pi$$

и

$$1 - \alpha_\mu(x) > \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 \frac{1}{\mu} \text{ при } x > 0.$$

В этой работе изучается поведение коэффициентов Фурье функции $g(x)$, исходя из известных свойств коэффициентов Фурье функции $f(x)$, связанной с $g(x)$ соотношением

$$\|g(x, t) - g(x)\|_{L_p(T^k)} \leq \|f(x, t) - f(x)\|_{L_p(T^k)}. \quad (2)$$

Впервые подобная задача для случая 2π -периодических непрерывных функций была рассмотрена в работе А.Берлинга [1], который доказал, что если для указанных функций выполняется соотношение

$$|g(x) - g(y)| \leq |f(x) - f(y)|,$$

$x, y \in R$ и $|a_n(f)| < \gamma_n$, где последовательность $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $\gamma_n \downarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(g)| < +\infty$.

Далее Р.Боас [2] обобщил сформулированный результат А.Берлинга, заменив условие сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ на более слабое требование

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}} \left(\sum_{k=1}^n k^2 \gamma_k^2 \right)^{1/2} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k^2 \right)^{1/2} < +\infty.$$

В дальнейшем эти результаты были обобщены в работах В.И.Прохоренко, М.Кинукава, Б.С.Ядава, Синоуши, Р.Г.Мамедова и Г.И.Османова [3] и др. авторов. Эти работы касались в основном функции от одной переменной. В настоящей работе подобная задача решается для функции из класса $L_p(T^k)$, $1 < p \leq 2$.

Теорема. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ периодические функции по каждой переменной с периодом 2π , принадлежат к классу $L_2(T^k)$ и удовлетворяют соотношению (1) при $p=2$, тогда если при некотором $0 < \beta < 2$

$$\sum_{l=1}^{\infty} l^{\frac{k}{2}(1-\frac{\beta}{2})-\beta-1} \left(\sum_{n=1}^l n^2 \rho_n^2(f) \right)^{\beta/2} + \sum_{l=1}^{\infty} l^{-\frac{k}{2}(1-\frac{\beta}{2})-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2(f) \right)^{\beta/2} < +\infty,$$

то

$$\sum_{N \in z^k} |C_N(g)|^{\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} |\rho_n(g)|^{\beta} < +\infty.$$

Доказательство. Из разложения (1) следует, что

$$f(x, t) - f(x) \sim \sum_{N \in z^k} c_N(f) \{ \alpha_{\mu}(t |N|) - 1 \} e^{i(N, x)}$$

и

$$g(x, t) - g(x) \sim \sum_{N \in z^k} c_N(f) \{ \alpha_{\mu}(t |N|) - 1 \} e^{i(N, x)},$$

тогда учитывая соотношение (2) и применяя равенство Парсеваля находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2(g) \left| 1 - \alpha_{\mu} \left(t n^{\frac{1}{2}} \right) \right|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2(f) \left| 1 - \alpha_{\mu} \left(t n^{\frac{1}{2}} \right) \right|^2. \quad (3)$$

Из неравенства (3) следует справедливость следующего соотношения

$$\sum_{n=m-1}^{2m} \rho_n^2(g) \left| 1 - \alpha_{\mu} \left(t n^{\frac{1}{2}} \right) \right|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2(f) \left| 1 - \alpha_{\mu} \left(t n^{\frac{1}{2}} \right) \right|^2. \quad (4)$$

Полагая $t = \frac{\pi}{\sqrt{2m}}$ и применяя лемму, к левой части неравенства (4) находим

$$\sum_{n=m-1}^{2m} \rho_n^2(g) \cdot n^2 \leq C m^2 \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2(f) \left| 1 - \alpha_{\mu} \left(\frac{\pi \cdot n^{1/2}}{(2m)^{1/2}} \right) \right|^2.$$

Легко убедиться в справедливости следующего неравенства

$$\sum_{n=m-1}^{2m} \rho_n^2(g) \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2(f) \left| 1 - \alpha_{\mu} \left(\pi \sqrt{\frac{n}{2m}} \right) \right|^2.$$

В силу неравенства Гельдера имеем

$$\sum_{n=m-1}^{2m} |\rho_n(g)|^{\beta} \leq \sum_{m \leq |N|^2 \leq 2m} |C_N(g)|^{\beta} \leq \left(\sum_{m \leq |N|^2 \leq 2m} |C_N(g)|^{\beta q} \right)^{1/q} \left(\sum_{m \leq |N|^2 \leq 2m} 1 \right)^{1/q'}, \quad (5)$$

где $q > 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Полагая $\beta q = 2$ из последнего неравенства находим:

$$\begin{aligned} \sum_{n=m-1}^{2m} |\rho_n(g)|^\beta &\leq \left(\sum_{m \leq |N|^2 \leq 2m} |C_N(g)|^2 \right)^{\beta/2} \left(\sum_{m \leq |N|^2 \leq 2m} 1 \right)^{1-\frac{\beta}{2}} \\ &\leq C m^{\frac{k}{2}(1-\frac{\beta}{2})} \left(\sum_{n=m}^{2m} \rho_n^2(g) \right)^{\beta/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Имея ввиду соотношение (5) и (6) получим

$$\sum_{n=m-1}^{2m} |\rho_n(g)|^\beta \leq C m^{\frac{k}{2}(1-\frac{\beta}{2})} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2(f) \left| 1 - \alpha_\mu \left(\pi \sqrt{\frac{n}{2m}} \right) \right|^2 \right\}^{\beta/2}.$$

Правую часть последнего неравенства разделим на две части и применим лемму. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=m-1}^{2m} |\rho_n(g)|^\beta &\leq C m^{\frac{k}{2}(1-\frac{\beta}{2})-\beta} \left(\sum_{n=1}^m n^2 \rho_n^2(f) \right)^{\beta/2} + \\ &+ C m^{\frac{k}{2}(1-\frac{\beta}{2})} \left(\sum_{n=1}^m \rho_n^2(f) \right)^{\beta/2} = S_1 + S_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\sum_{l=m}^{2m} l^{\frac{k}{2}(1-\frac{\beta}{2})-\beta-1} \left(\sum_{n=1}^l n^2 \rho_n^2(f) \right)^{\beta/2} \geq C m^{\frac{k}{2}(1-\frac{\beta}{2})-\beta} \left(\sum_{n=1}^m n^2 \rho_n^2(f) \right)^{\beta/2} = S_1 \quad (8)$$

$$\sum_{l=\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}^m l^{\frac{k}{2}(1-\frac{\beta}{2})-1} \left(\sum_{n=l}^{\infty} \rho_n^2(f) \right)^{\beta/2} \geq C m^{\frac{k}{2}(1-\frac{\beta}{2})} \left(\sum_{n=m}^{\infty} \rho_n^2(f) \right)^{\beta/2} = S_2. \quad (9)$$

Имея ввиду (8) и (9) из (7) находим, что

$$\sum_{n=m-1}^{2m} |\rho_n(g)|^\beta \leq \sum_{l=m}^{2m} l^{\frac{k}{2}(1-\frac{\beta}{2})-\beta-1} \left(\sum_{n=1}^l n^2 \rho_n^2(f) \right)^{\beta/2} + \sum_{l=\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^m l^{\frac{k}{2}(1-\frac{\beta}{2})-1} \left(\sum_{n=l}^{\infty} \rho_n^2(f) \right)^{\beta/2}.$$

Полагая $m = 2^\nu$ и суммируя по $\nu = 1, 2, \dots$ находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\rho_n(g)|^\beta \leq C \sum_{l=1}^{\infty} l^{\frac{k}{2}(1-\frac{\beta}{2})-\beta-1} \left(\sum_{n=1}^l n^2 \rho_n^2(f) \right)^{\beta/2} + C \sum_{l=1}^{\infty} l^{\frac{k}{2}(1-\frac{\beta}{2})-1} \left(\sum_{n=l}^{\infty} \rho_n^2(f) \right)^{\beta/2}.$$

Имея ввиду условие из последнего неравенства заключаем, что $\sum_{n=1}^{\infty} |\rho_n(g)|^\beta \leq +\infty$ при $0 < \beta < 2$.

Литература

1. Beurling A. On the spectral synthesis of bounded functions. Acta Math., vol.81, 1949-p.225-238
2. Boas R. Berlings test the for absolute convergence of Fourier series. Bull. Amer. Math. Soc., vol. 66, 1960. pp. 24-27
3. Мамедов Р.Г. и Османов Г.Н. Некоторые свойства преобразований Фурье и свойства коэффициентов Фурье. Известия АН Азерб. ССР, сер. физ. тех. матем. наук, 1966, 2.- с. 15-24
4. Szasz O. Fourier series and mean module of continuity. Trans. Amer. Math. Soc. vol. 42 (1937).-p. 366-395

Мамедова Н.Р.

Азербайджанская Государственная Нефтяная Академия

E-mail: rugiya-a-35@mail.ru

Азизова Р.Г.

Азербайджанская Государственная Нефтяная Академия

Received 9 October 2012

Published 23 November 2012