

Исследование одной задачи о преобразовании Фурье функции многих переменных

Мамедова Н.Р.

Аннотация. In this paper we study the behavior of the Fourier transform of several variables on the basis of the Fourier transform of another function related to some relation.

Key Words and Phrases: Fourier transform, Holder inequality

2000 Mathematics Subject Classifications: 42B10

Пусть $f(x) \in L_p(R^k)$ ($x \in R^k$) и

$$f(x) \sim \int_{R^k} \hat{f}(u) e^{i(x,u)} du$$

где

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{R^k} f(x) e^{-i(x,u)} dx$$

преобразование Фурье функции $f(x)$.

$$f(x, t) = \frac{\Gamma(\frac{k}{2})}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} \int_{\Sigma} f(x_1 + t\xi_1, \dots, x_k + t\xi_k) d \sum_{\xi}$$

есть сферическое среднее функции $f(x)$ по сфере с радиусом t и центром в точке x , где $\sum : \xi_1^2 + \dots + \xi_k^2 = 1$ единичная сфера; $d \sum_{\xi}$ - элемент объема размерностью $(k-1)$. Пусть $g(x) \in L_p(R^k)$ и связана с функцией $f(x)$ соотношением

$$\|g(x, t) - g(x)\|_{L_p(R^k)} \leq \|f(x, t) - f(x)\|_{L_p(R^k)}. \quad (1)$$

Ставится следующая задача.

Зная поведение преобразования Фурье функции $f(x)$, изучить поведение преобразования Фурье функции $g(x)$, которая связана с функцией $f(x)$ соотношением (1).

Положим

$$M_\beta(f; I; p) = \int_0^1 \frac{1}{I(t)} \left(\int_{R^k} |\Delta f(x; t)|^p dx \right)^{\frac{\beta}{p}} dt,$$

$$N_\beta(f; I; p') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-2}}{I\left(\frac{1}{n}\right)} \left(\int_{|x| \geq n} |\hat{f}(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{\beta}{p'}},$$

$$T_\beta(f; I; p') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-(2+2\beta)}}{I\left(\frac{1}{n}\right)} \left(\int_{|x| \leq n} |x|^2 |\hat{f}(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{\beta}{p'}},$$

где $dx = dx_1 \dots dx_k$.

Теорема 1. Соотношения $N_\beta(f; I; p') < +\infty$ и $T_\beta(f; I; p') < +\infty$ соответственно эквивалентны к следующим соотношениям:

$$N_\beta^*(f; I; p') = \sum_{\vartheta=0}^{\infty} \frac{2^{-\vartheta}}{I(2^{-\vartheta})} \left(\int_{|x| \geq 2^\vartheta} |\hat{f}(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{\beta}{p'}} < +\infty$$

и

$$T_\beta^*(f; I; p') = \sum_{\vartheta=0}^{\infty} \frac{n^{-\vartheta(1+2\beta)}}{I(2^{-\vartheta})} \left(\int_{|x| \leq 2^\vartheta} |x|^2 |\hat{f}(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{\beta}{p'}} < +\infty.$$

Теорема 2. Если $T_\beta^*(f; I; p') < +\infty$ при $0 < \beta \leq p'$, то имеем

$$\int_{R^k} \frac{|\hat{f}(x)| dx}{I\left(\frac{1}{|x|}\right) |x|^{k\left(1-\frac{\beta}{p'}+\frac{1}{k}\right)}} < +\infty$$

Доказательство. В силу неравенства Гельдера при $0 < \beta < p'$ находим

$$\begin{aligned} \int_{2^{n-1} \leq |x| \leq 2^n} |\hat{f}(x)|^\beta dx &= \int_{2^{n-1} \leq |x| \leq 2^n} |x|^{2\beta} |\hat{f}(x)|^\beta |x|^{-2\beta} dx \leq \\ &\leq \left(\int_{2^{n-1} \leq |x| \leq 2^n} (|x|^2 |\hat{f}(x)|)^{\beta\gamma} dx \right)^{1/\gamma} \times \\ &\quad \times \left(\int_{2^{n-1} \leq |x| \leq 2^n} |x|^{-2\beta\gamma'} dx \right)^{\frac{1}{\gamma'}}, \quad \gamma > 1, \quad \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma'} = 1. \end{aligned}$$

Положим $\gamma\beta = p'$. Отсюда $\gamma' = \frac{p'}{p'-\beta}$. Тогда из последнего неравенства следует

$$\begin{aligned}
\int_{2^{n-1} \leq |x| \leq 2^n} |\hat{f}(x)|^\beta dx &\leq \left(\int_{2^{n-1} \leq |x| \leq 2^n} (|x|^2 |\hat{f}(x)|)^{p'} dx \right)^{\frac{\beta'}{p}} \times \\
&\times \left(\int_{2^{n-1} \leq |x| \leq 2^n} |x|^{-2\beta \frac{p'}{p'-\beta}} dx \right)^{1-\frac{\beta'}{p}} \leq \\
&\leq C \cdot 2^{-2n\beta} \left(\int_{2^{n-1} \leq |x| \leq 2^n} (|x|^2 |\hat{f}(x)|)^{p'} dx \right)^{\frac{\beta'}{p}} \left(\int_{2^{n-1} \leq |x| \leq 2^n} dx \right)^{1-\frac{\beta'}{p}} \leq \\
&\leq C_1 \cdot 2^{-2n\beta} \cdot 2^{nk(1-\frac{\beta}{p'})} \left(\int_{2^{n-1} \leq |x| \leq 2^n} (|x|^2 |\hat{f}(x)|)^{p'} dx \right)^{\frac{\beta'}{p}}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \int_{2^{n-1} \leq |x| \leq 2^n} \frac{|\hat{f}(x)|^\beta}{I\left(\frac{1}{|x|}\right) |x|^{k\left(1-\frac{\beta}{p'}+\frac{1}{k}\right)}} dx \leq \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-kn\left(1-\frac{\beta}{p'}+\frac{1}{k}\right)}}{I\left(\frac{1}{2^n}\right)} \int_{2^{n-1} \leq |x| \leq 2^n} |\hat{f}(x)|^\beta dx \leq \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-2n\beta-n}}{I\left(\frac{1}{2^n}\right)} \left(\int_{2^{n-1} \leq |x| \leq 2^n} (|x|^2 |\hat{f}(x)|)^{p'} dx \right)^{\frac{\beta}{p'}} \leq C \cdot T_\beta^*(1; I, p').
\end{aligned}$$

Отсюда не трудно убедиться в том, что

$$\int_{R^k} \frac{\hat{f}(x)}{I\left(\frac{1}{|x|}\right) |x|^{k\left(1-\frac{\beta}{p'}+\frac{1}{k}\right)}} dx < +\infty.$$

Теорема 3. Пусть $1 < p \leq 2$, $pp' = p + p'$, $0 \leq \beta \leq p'$.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ связаны соотношением (1) и кроме того $M_\beta(f; I; p) < +\infty$, тогда

$$\int_{R^k} \frac{|\hat{g}(x)|^\beta}{I\left(\frac{1}{|x|}\right) |x|^{k\left(1-\frac{\beta}{p'}+\frac{1}{k}\right)}} dx < +\infty$$

где $\hat{g}(x)$ является преобразованием Фурье функции $g(x) \in L_p(R^k)$.

Справедливость этой теоремы следует из соотношения (1) и теоремы 2.

Литература

1. Tichmarch E.C. A note on Fourier transforms J. London Math. Soc., 2,7, (1927)-p. 148-150

2. Мамедов Р.Г. и Османов Г.И. Некоторые свойства функций, выражаемые их коэффициентами и преобразованиями Фурье. Известия высших учебных заведений. Математика, 1976, №5 (168)
3. Safarova R.G. Absolute convergence of Fourier integral of function from the class $L_p(R^k)$ ($1 \leq p \leq 2$). Azerbaijan Academy of Sciences proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics (1999), vol. X(XVIII). Pp. 148-156
4. Сафарова Р.Г. О коэффициентах Фурье функции многих переменных. Aspirantların elmi konfransının materialları (1998), II cild (riyaziyyat bolmesi). – s. 18-19

Мамедова Н.Р.

Азербайджанская Государственная Нефтяная Академия

E-mail: rugiya-a-35@mail.ru

Received 9 October 2012

Published 23 November 2012