

Метод Коллокации Приближенного Решения Граничных Задач для Уравнений Эллиптического Типа

С.Г.Гасимова

Аннотация. We study the convergence and rate of convergence of collocation for linear elliptic equations on the unit s -dimensional cube.

Key Words and Phrases: collocation method, rate of convergence, boundary value problem, elliptic equations, Lagrange interpolation polynomial

2000 Mathematics Subject Classifications: 65N35

1. Определение узлов коллокации и сходимость интерполяционных многочленов

Пусть G_s – s -мерный единичный куб, определенный неравенствами $0 \leq x_i \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, s$) и $P_i(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, s$) – неотрицательно суммируемые функции на отрезке $[0, 1]$, удовлетворяющие условию

$$\int_0^1 \frac{dx_i}{P_i(x_i)} < \infty \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (1)$$

Через $t_{k_i}^{(n_i)}$ ($k_i = 0, 1, \dots, n_i$, $i = 1, 2, \dots, s$) обозначим нули полинома $\omega_{n_i}(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, s$), где $\{\omega_{n_i}(x_i)\}$ – система ортогональных алгебраических полиномов относительно веса $P_i(x_i)$ на отрезке $[0, 1]$.

Пусть L_{n_i} – линейный оператор, проектирующий каждую непрерывную функцию $\varphi_i(x_i)$ в соответствии с ее интерполяционным многочленом Лагранжа степени n_i ($i = 1, 2, \dots, s$), построенный по узлам

$$t_0^{(n_i)}, t_1^{(n_i)}, \dots, t_{n_i}^{(n_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Очевидно, что точки

$$\left(t_{k_1}^{(n_1)}, t_{k_2}^{(n_2)}, \dots, t_{k_s}^{(n_s)} \right),$$

где $k_i = 0, 1, \dots, n_i$, $i = 1, 2, \dots, s$ принадлежат единичному s -мерному кубу G_s .

Обозначим через $\ell_{k_i}^{(n_i)}(x_i)$ фундаментальные полиномы интерполирования:

$$\ell_{k_i}^{(n_i)}(x_i) = \frac{\omega_{n_i}(x_i)}{\omega'_{n_i}(t_{k_i}^{(n_i)})(x_i - t_{k_i}^{(n_i)})}, \quad (2)$$

где

$$\omega_{n_i}(x_i) = (x_i - t_0^{(n_i)})(x_i - t_1^{(n_i)}) \dots (x_i - t_{n_i}^{(n_i)}), \quad (3)$$

$$i = 1, 2, \dots, s, \quad k_i = 0, 1, \dots, n_i.$$

Известно [1], что фундаментальные полиномы $\ell_{k_i}^{(n_i)}(x_i)$ и $\ell_{k_j}^{(n_j)}(x_j)$ ($k_i, k_j = 0, 1, \dots, n_i$) при $i \neq j$ взаимно ортогональны на $[0, 1]$ по весу $P_i(x_i)$ и для фундаментальных полиномов $\ell_{k_i}^{(n_i)}(x_i)$ справедливо соотношение

$$\sum_{k_i=0}^{n_i} \int_0^1 P_i(x_i) \ell_{k_i}^{(n_i)}(x_i) \ell_{k_j}^{(n_j)}(x_j) dx_i = \begin{cases} 0 & \text{при } k_i \neq k_j \\ \int_0^1 P_i(x_i) dx_i & \text{при } k_i = k_j. \end{cases} \quad (4)$$

Также по теореме Эрдеша-Турана [1] известно, что для любой непрерывной функции $\varphi_i(x_i)$ последовательность интерполяционных полиномов Лагранжа

$$L_{n_i}(x_i; \varphi_i) = \sum_{k_i=0}^{n_i} \varphi_i(t_{k_i}^{(n_i)}) \ell_{k_i}^{(n_i)}(x_i), \quad (5)$$

построенные по узлам интерполяции

$$t_0^{(n_i)}, t_1^{(n_i)}, \dots, t_{n_i}^{(n_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (6)$$

среднеквадратично с весом $P_i(x_i)$ сходится к функции $\varphi_i(x_i)$ и справедливо неравенство

$$\left(\int_0^1 P_i(x_i) [\varphi_i(x_i) - L_{n_i}(x_i; \varphi_i)]^2 dx_i \right)^{1/2} \leq 2E_{n_i} \left(\int_0^1 P_i(x_i) dx_i \right)^{1/2}, \quad (7)$$

где $E_{n_i} = E_{n_i}(\varphi_i)$ - наилучшее приближение функции $\varphi_i(x_i)$ алгебраическими полиномами степени n_i на отрезке $[0, 1]$. Теперь в качестве узлов коллокации выберем точки

$$(t_{k_1}^{(n_1)}, t_{k_2}^{(n_2)}, \dots, t_{k_s}^{(n_s)}) \in G_s$$

и для любой функции $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_s)$, определенной в области G_s , построим интерполяционный полином Лагранжа по определяемым узлам $(t_{k_1}^{(n_1)}, t_{k_2}^{(n_2)}, \dots, t_{k_s}^{(n_s)})$

$$L_{n_1, n_2, \dots, n_s}(x_1, x_2, \dots, x_s) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s} \varphi \left(t_{k_1}^{(n_1)}, t_{k_2}^{(n_2)}, \dots, t_{k_s}^{(n_s)} \right) \times \quad (8)$$

$$\times \ell_{k_1}^{(n_1)}(x_1) \ell_{k_2}^{(n_2)}(x_2) \dots \ell_{k_s}^{(n_s)}(x_s) .$$

Теорема 1. Если функция $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_s)$ определена и непрерывна в единичном s - мерном кубе G_s , то последовательность интерполяционных алгебраических полиномов Лагранжа $L_{n_1, n_2, \dots, n_s}(x_1, x_2, \dots, x_s)$, построенные по узлам $\left(t_{k_1}^{(n_1)}, t_{k_2}^{(n_2)}, \dots, t_{k_s}^{(n_s)} \right)$ для заданной функции $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_s)$ сходится среднеквадратично к функции $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_s)$ с весом

$$P(x_1, x_2, \dots, x_s) = P_1(x_1) P_2(x_2) \dots P_s(x_s)$$

и справедливо неравенство

$$\left(\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 P(x_1, x_2, \dots, x_s) [\varphi(x_1, x_2, \dots, x_s) - L_{n_1, n_2, \dots, n_s}(x_1, x_2, \dots, x_s)]^2 dx_1 \dots dx_s \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq 2E_{n_1, n_2, \dots, n_s}(\varphi) \prod_{i=1}^s \left(\int_0^1 P_i(x_i) dx_i \right)^{1/2}, \quad (9)$$

где $E_{n_1, n_2, \dots, n_s}(\varphi)$ – наилучшее равномерное приближение функции $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_s)$ алгебраическими многочленами степени n_1 относительно x_1 , степени n_2 относительно x_2 и, наконец, степени n_s относительно x_s .

Доказательство. Пусть $Q_{n_1, n_2, \dots, n_s}(x_1, x_2, \dots, x_s) = Q(x_1, x_2, \dots, x_s)$ – многочлен наилучшего приближения функции $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_s)$ в G_s .

Пользуясь неравенством

$$(A + B)^2 \leq 2(A^2 + B^2)$$

и учитывая формулу

$$L_{n_1, n_2, \dots, n_s}(Q(x_1, x_2, \dots, x_s)) = Q(x_1, x_2, \dots, x_s),$$

будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 P(x_1, x_2, \dots, x_s) [\varphi(x_1, x_2, \dots, x_s) - L_{n_1, n_2, \dots, n_s}(\varphi)]^2 dx_1 dx_2 \dots dx_s = \\ & = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 P(x_1, x_2, \dots, x_s) \{ [\varphi(x_1, x_2, \dots, x_s) - Q(x_1, x_2, \dots, x_s)] + \\ & + [L_{n_1, n_2, \dots, n_s}(Q) - L_{n_1, n_2, \dots, n_s}(\varphi)] \}^2 dx_1 dx_2 \dots dx_s \leq \quad (10) \\ & \leq 2 \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 P(x_1, x_2, \dots, x_s) [\varphi(x_1, x_2, \dots, x_s) - Q(x_1, x_2, \dots, x_s)]^2 dx_1 \dots dx_s + \\ & + 2 \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 P(x_1, x_2, \dots, x_s) [L_{n_1, n_2, \dots, n_s}(Q) - L_{n_1, n_2, \dots, n_s}(\varphi)]^2 dx_1 dx_2 \dots dx_s. \end{aligned}$$

Оценив в правой части неравенства (10) первый и второй интегралы, находим:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 P(x_1, x_2, \dots, x_s) [\varphi(x_1, x_2, \dots, x_s) - Q(x_1, x_2, \dots, x_s)]^2 dx_1 dx_2 \dots dx_s \leq \\ & \leq E_{n_1, n_2, \dots, n_s}^2(\varphi) \prod_{i=1}^s \left(\int_0^1 P_i(x_i) dx_i \right), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 P(x_1, x_2, \dots, x_s) [L_{n_1, n_2, \dots, n_s}(Q) - L_{n_1, n_2, \dots, n_s}(\varphi)]^2 dx_1 dx_2 \dots dx_s = \\ & = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 P(x_1, x_2, \dots, x_s) [L_{n_1, n_2, \dots, n_s}(Q - \varphi)]^2 dx_1 dx_2 \dots dx_s = \\ & = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 P(x_1, x_2, \dots, x_s) \left\{ \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s} \left[Q\left(t_{k_1}^{(n_1)}, t_{k_2}^{(n_2)}, \dots, t_{k_s}^{(n_s)}\right) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \varphi\left(t_{k_1}^{(n_1)}, t_{k_2}^{(n_2)}, \dots, t_{k_s}^{(n_s)}\right) \right] \ell_{k_1}^{(n_1)}(x_1) \ell_{k_2}^{(n_2)}(x_2) \dots \ell_{k_s}^{(n_s)}(x_s) \right\}^2 dx_1 dx_2 \dots dx_s \leq \\ & \leq E_{n_1, n_2, \dots, n_s}^2(\varphi) \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s} P(x_1, x_2, \dots, x_s) \times \\ & \times \left[\ell_{k_1}^{(n_1)}(x_1) \ell_{k_2}^{(n_2)}(x_2) \dots \ell_{k_s}^{(n_s)}(x_s) \right]^2 dx_1 dx_2 \dots dx_s = \\ & = E_{n_1, n_2, \dots, n_s}^2(\varphi) \prod_{i=1}^s \int_0^1 \sum_{k_i=0}^{n_i} P_i(x_i) \left[\ell_{k_i}^{(n_i)}(x_i) \right]^2 dx_i = \\ & = E_{n_1, n_2, \dots, n_s}(\varphi) \prod_{i=0}^s \left(\int_0^1 P_i(x_i) dx_i \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Учитывая неравенства (11) и (12), из неравенства (10) получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 P(x_1, x_2, \dots, x_s) [\varphi(x_1, x_2, \dots, x_s) - \\ & - L_{n_1, n_2, \dots, n_s}(\varphi)]^2 dx_1 dx_2 \dots dx_s \leq 4E_{n_1, n_2, \dots, n_s}^2(\varphi) \prod_{i=0}^s \left(\int_0^1 P_i(x_i) dx_i \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Следовательно, неравенство (9) справедливо.

2. Приближенное Решение Граничных Задач для Уравнений Эллиптического Типа

Сходимость метода коллокации для одномерных и многомерных интегральных уравнений и для обыкновенных дифференциальных уравнений исследованы в работах [2], [3], [4].

В работах [5], [6] изучена сходимость метода коллокации для некоторых граничных задач математической физики.

В этом пункте устанавливается возможность осуществления и быстрота сходимости метода коллокации для линейных уравнений эллиптического типа в единичном s -мерном кубе G_s .

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Lu - \lambda Au = f(x) \quad (14)$$

при граничных условиях

$$\ell_i u|_{\Gamma} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (15)$$

где L - линейный дифференциальный оператор $2m$ -го порядка ($m \geq 1$) эллиптического типа в единичном кубе G_s s -мерного пространства точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_s)$, A - линейный дифференциальный оператор с частными производными порядка $2r$, $r \leq m-1$, $f(x)$ - функция, непрерывная в G_s , ℓ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) - линейные дифференциальные операторы с коэффициентами, непрерывными вдоль границы Γ единичного куба G_s .

Пусть однородное уравнение

$$Lu = 0 \quad (16)$$

при краевых условиях (15) иметь лишь тривиальное решение $u \equiv 0$. Тогда для задачи (16), (15) существует функция Грина

$$g(x, t) = g(x_1, x_2, \dots, x_s, t_1, t_2, \dots, t_s).$$

Лемма. Пусть дифференциальное выражение $Lu(x)$ имеет при граничных условиях (15) функцию Грина $g(x, t) = g(x_1, x_2, \dots, x_s, t_1, t_2, \dots, t_s)$ в единичном кубе G_s .

Тогда:

1) если $u(x)$ - решение задачи (14), (15), то $Lu(x)$ - решение интегрального уравнения

$$\psi(x) = \lambda \int_{G_s} Ag(x, t) \psi(t) dt + f(t); \quad (17)$$

2) если же $\psi(x)$ - решение интегрального уравнения (17), то функция

$$u(x) = \int_{G_s} g(x, t) \psi(t) dt + \int_{G_s} g(x, t) f(t) dt \quad (18)$$

является решением задачи (14), (15).

Доказательство. Пусть $u(x)$ - решение задачи (14), (15). Тогда решение $u(x)$ задается формулой

$$u(x) = \int_{G_s} g(x, t) Lu(t) dt. \quad (19)$$

Отсюда в силу уравнения (14) находим, что

$$Lu(x) = \lambda \int_{G_s} Ag(x, t) Lu(t) dt + f(x). \quad (20)$$

Следовательно, функция $\psi(x) = Lu(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (17).

Пусть теперь $\psi(x)$ является решением интегрального уравнения (17). Действуя на обе части равенства (19) оператором A , получим, что

$$Au(x) = \int_{G_s} Ag(x, t) Lu(t) dt. \quad (21)$$

С другой стороны, в силу уравнения (14) равенство (19) можно переписать в виде

$$u(x) = \lambda \int_{G_s} g(x, t) Au(t) dt + \int_{G_s} g(x, t) f(t) dt. \quad (22)$$

Теперь, также действуя на обе части равенства (22) оператором A , найдем

$$Au(x) = \lambda \int_{G_s} Ag(x, t) Au(t) dt + \int_{G_s} Ag(x, t) f(t) dt. \quad (23)$$

Отсюда заключаем, что $Au(x)$ является решением интегрального уравнения (23).

Подставляя вместо $Au(x)$ в равенстве (23) правую часть (21), получим

$$\int_{G_s} Ag(x, t) Lu(t) dt = \lambda \int_{G_s} Ag(x, t) Au(t) dt + \int_{G_s} Ag(x, t) f(t) dt.$$

Отсюда находим, что

$$\int_{G_s} [Lu(t) - \lambda Au(t) - f(t)] Ag(x, t) dt = 0. \quad (24)$$

Из соотношения (24) следует, что

$$Lu(t) - \lambda Au(t) - f(t) = 0.$$

Следовательно, $u(x)$ является решением задачи (14), (15).

Теперь введем следующие условия:

а) дифференциальное выражение $Lu(x)$ при граничных условиях

$$\ell_i u|_{\Gamma} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

имеет функцию Грина $g(x, t)$ в единичном кубе G_s ;

б) линейное дифференциальное выражение $Ag(x, t)$ удовлетворяет условиям

$$\sup_{x \in G_s} \int_{G_s} \frac{|Ag(x, t)|^2}{P(t)} dt < \infty$$

и

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{G_s} \frac{[Ag(x + \Delta x, t) - Ag(x, t)]^2}{P(t)} dt = 0$$

$$\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_s);$$

в) в правой части уравнения (14) функция $f(x)$ является непрерывной функцией в единичном s -мерном кубе G_s .

Приближенные решения задачи (14), (15) разыскиваются в виде:

$$u_{n_1, n_2, \dots, n_s}(x_1, x_2, \dots, x_s) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s} c_{k_1, \dots, k_s} \sigma_{k_1, \dots, k_s}^{(n_1, \dots, n_s)}(x_1, x_2, \dots, x_s), \quad (25)$$

где $\sigma_{k_1, \dots, k_s}^{(n_1, \dots, n_s)}(x_1, x_2, \dots, x_s)$ - решения дифференциального уравнения

$$L\sigma_{k_1, \dots, k_s}^{(n_1, \dots, n_s)}(x_1, x_2, \dots, x_s) = \ell_{k_1}^{(n_1)}(x_1) \dots \ell_{k_s}^{(n_s)}(x_s), \quad (26)$$

удовлетворяющие на границе Γ условиям:

$$\ell_i \sigma_{k_1, \dots, k_s}^{(n_1, \dots, n_s)}(x_1, x_2, \dots, x_s) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (27)$$

В силу условия а) решение задачи (26), (27) задается формулой

$$\begin{aligned} \sigma_{k_1, \dots, k_s}^{(n_1, \dots, n_s)}(x_1, x_2, \dots, x_s) &= \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 g(x_1, x_2, \dots, x_s, t_1, t_2, \dots, t_s) \times \\ &\times \ell_{k_1}^{(n_1)}(t_1) \dots \ell_{k_s}^{(n_s)}(t_s) dt_1 \dots dt_s \end{aligned} \quad (28)$$

Согласно методу коллокации коэффициенты $c_{k_1, \dots, k_s}$ определяются из линейной алгебраической системы

$$\begin{aligned} &Lu_{n_1, \dots, n_s}(x_1, \dots, x_s) - \lambda Au_{n_1, \dots, n_s}(x_1, \dots, x_s) - \\ &- f(x_1, \dots, x_s) \Big|_{x_1=t_{k_1}^{(n_1)}, \dots, x_s=t_{k_s}^{(n_s)}} = 0, \\ &k_1 = 0, 1, \dots, n_1; \dots; k_s = 0, 1, \dots, n_s. \end{aligned} \quad (29)$$

Учитывая равенства (25) и (26), систему (29) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} c_{i_1, i_2, \dots, i_s} - \lambda \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s} c_{k_1, \dots, k_s} A \left(\sigma_{k_1, \dots, k_s}^{(n_1, \dots, n_s)} \left(t_{k_1}^{(n_1)}, t_{k_2}^{(n_2)}, \dots, t_{k_s}^{(n_s)} \right) \right) = \\ = f \left(t_{i_1}^{(n_1)}, t_{i_2}^{(n_2)}, \dots, t_{i_s}^{(n_s)} \right), \quad i_1 = 0, 1, \dots, n_1; \dots; i_s = 0, 1, \dots, n_s. \end{aligned} \quad (30)$$

Теорема 2. Если выполнены условия а), б), в) и λ не является собственным значением задачи (14), (15), то при достаточно больших $n_1, n_2, \dots, n_s$ система алгебраических уравнений (30) однозначно разрешима и последовательность приближенных решений

$$\begin{aligned} u_{n_1, \dots, n_s}(x_1, \dots, x_s) &= \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s} c_{k_1, \dots, k_s} \times \\ &\times \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 g(x_1, x_2, \dots, x_s, t_1, t_2, \dots, t_s) \ell_{k_1}^{(n_1)}(t_1) \dots \ell_{k_s}^{(n_s)}(t_s) dt_1 \dots dt_s \end{aligned} \quad (31)$$

с коэффициентами $c_{k_1, \dots, k_s}$, определенными из системы (30), при том же значении λ равномерно сходятся вместе со своими дифференциальными выражениями $Au_{n_1, n_2, \dots, n_s}(x_1, x_2, \dots, x_s)$ в единичном s -мерном кубе G_s к решению $u_0(x_1, \dots, x_s)$ задачи (14), (15) и к его соответствующим дифференциальным выражениям $Au_0(x_1, x_2, \dots, x_s)$, а последовательность дифференциальных выражений $Lu_{n_1, n_2, \dots, n_s}(x_1, x_2, \dots, x_s)$ средне квадратично с весом $P(x_1, x_2, \dots, x_s) =$

$P_1(x_1)P_2(x_2)\dots P_s(x_s)$ сходится к $Lu_0(x_1, x_2, \dots, x_s)$. При этом быстрота сходимости характеризуется соотношениями

$$\max_{(x_1, \dots, x_s) \in G_s} |u_{n_1, \dots, n_s}(x_1, x_2, \dots, x_s) - u_0(x_1, x_2, \dots, x_s)| = O(E_{n_1, \dots, n_s}(Lu_0)), \quad (32)$$

$$\max_{(x_1, \dots, x_s) \in G_s} |Au_{n_1, \dots, n_s}(x_1, \dots, x_s) - Au_0(x_1, \dots, x_s)| = O(E_{n_1, \dots, n_s}(Lu_0)), \quad (33)$$

$$\left(\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 P_1(x_1) P_2(x_2) \dots P_s(x_s) [Lu_{n_1, \dots, n_s}(x_1, \dots, x_s) - Lu_0(x_1, \dots, x_s)]^2 dx_1 \dots dx_s \right)^{1/2} = O(E_{n_1, \dots, n_s}(Lu_0)), \quad (34)$$

где $E_{n_1, n_2, \dots, n_s}(Lu_0)$ - наилучшее равномерное приближение функции $Lu_0(x_1, x_2, \dots, x_s)$ многочленами степени не выше $n_1, n_2, \dots, n_s$ относительно $x_1, x_2, \dots, x_s$, соответственно.

Доказательство. Согласно условию а) решение граничной задачи (14), (15) приводится к решению интегрального уравнения (20). Тогда в силу леммы Lu_0 является решением интегрального уравнения (20). Теперь, умножив соотношение (30) на $L\sigma_{i_1, i_2, \dots, i_s}^{(n_1, \dots, n_s)}(x_1, x_2, \dots, x_s)$ и суммировав по $i_1, i_2, \dots, i_s$, получаем:

$$\begin{aligned} & Lu_{n_1, n_2, \dots, n_s}(x_1, x_2, \dots, x_s) - \lambda \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \dots \sum_{i_s=0}^{n_s} L\sigma_{i_1, \dots, i_s}^{(n_1, \dots, n_s)}(x_1, x_2, \dots, x_s) \times \\ & \times \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s} c_{k_1, \dots, k_s} A\sigma_{k_1, \dots, k_s}^{(n_1, \dots, n_s)} \left(t_{k_1}^{(n_1)}, t_{k_2}^{(n_2)}, \dots, t_{k_s}^{(n_s)} \right) = \\ & = \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \dots \sum_{i_s=0}^{n_s} f \left(t_{i_1}^{(n_1)}, t_{i_2}^{(n_2)}, \dots, t_{i_s}^{(n_s)} \right) L\sigma_{i_1, \dots, i_s}^{(n_1, \dots, n_s)}(x_1, x_2, \dots, x_s). \end{aligned} \quad (35)$$

В силу равенств (26) и (28) из равенства (35) получаем:

$$\begin{aligned} & Lu_{n_1, n_2, \dots, n_s}(x_1, x_2, \dots, x_s) - \lambda \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \dots \sum_{i_s=0}^{n_s} \ell_{i_1}^{(n_1)}(x_1) \dots \ell_{i_s}^{(n_s)}(x_s) \times \\ & \times \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s} c_{k_1, \dots, k_s} \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 Ag \left(t_{k_1}^{(n_1)}, t_{k_2}^{(n_2)}, \dots, t_{k_s}^{(n_s)}, t_1, t_2, \dots, t_s \right) \times \\ & \times \ell_{k_1}^{(n_1)}(t_1) \dots \ell_{k_s}^{(n_s)}(t_s) dt_1 \dots dt_s = \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \dots \sum_{i_s=0}^{n_s} f \left(t_{i_1}^{(n_1)}, \dots, t_{i_s}^{(n_s)} \right) \ell_{i_1}^{(n_1)}(x_1) \dots \ell_{i_s}^{(n_s)}(x_s). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & Lu_{n_1, \dots, n_s}(x_1, \dots, x_s) - \lambda \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \dots \sum_{i_s=0}^{n_s} \left(\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 Ag \left(t_{i_1}^{(n_1)}, \dots, t_{i_s}^{(n_s)}, t_1, \dots, t_s \right) \times \right. \\ & \quad \times Lu_{n_1, \dots, n_s}(t_1, \dots, t_s) dt_1 \dots dt_s \left. \right) \ell_{i_1}^{(n_1)}(x_1) \dots \ell_{i_s}^{(n_s)}(x_s) = \\ & = \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \dots \sum_{i_s=0}^{n_s} f \left(t_{i_1}^{(n_1)}, t_{i_2}^{(n_2)}, \dots, t_{i_s}^{(n_s)} \right) \ell_{i_1}^{(n_1)}(x_1) \dots \ell_{i_s}^{(n_s)}(x_s). \end{aligned} \quad (36)$$

Равенство (36) означает, что система алгебраических уравнений (30) равносильно условию

$$\begin{aligned} P_{n_1, \dots, n_s} [Lu_{n_1, \dots, n_s}(x_1, \dots, x_s) - \lambda T Lu_{n_1, \dots, n_s}(t_1, \dots, t_s)] = \\ = P_{n_1, \dots, n_s} [f(x_1, \dots, x_s)], \end{aligned} \quad (37)$$

где $P_{n_1, \dots, n_s}$ - линейный проекционный оператор, ставящий каждую функцию в соответствии с ее интерполяционным многочленом Лагранжа степени $n_1, n_2, \dots, n_s$ относительно $x_1, x_2, \dots, x_s$ соответственно, построенный по узлам $\left(t_{k_1}^{(n_1)}, t_{k_2}^{(n_2)}, \dots, t_{k_s}^{(n_s)}\right)$, T - интегральный оператор с ядром

$$T(x_1, \dots, x_s, t_1, \dots, t_s) = Ag(x_1, \dots, x_s, t_1, \dots, t_s),$$

$$T Lu = \int_0^1 \dots \int_0^1 Ag(x_1, \dots, x_s, t_1, \dots, t_s) Lu(t_1, \dots, t_s) dt_1 \dots dt_s.$$

Так как $Lu_{n_1, n_2, \dots, n_s}(x_1, x_2, \dots, x_s)$ является многочленом относительно $x_1, x_2, \dots, x_s$ степени соответственно не выше $n_1, n_2, \dots, n_s$, то

$$P_{n_1, \dots, n_s}(Lu_{n_1, \dots, n_s}(x_1, \dots, x_s)) = Lu_{n_1, \dots, n_s}(x_1, \dots, x_s). \quad (38)$$

Тогда, учитывая условие (38), из равенства (37) следует, что

$$\begin{aligned} Lu_{n_1, \dots, n_s}(x_1, \dots, x_s) - \lambda P_{n_1, \dots, n_s} T Lu_{n_1, \dots, n_s}(x_1, \dots, x_s) = \\ = P_{n_1, \dots, n_s} f(x_1, \dots, x_s). \end{aligned} \quad (39)$$

Таким образом, система алгебраических уравнений (30) или условия (29) равносильны соотношению (39).

Пусть $W = T Lu$. Используя неравенство Буняковского, получим, что

$$\begin{aligned} \max_{(x_1, \dots, x_s) \in G_s} W(x_1, x_2, \dots, x_s) &= \max_{(x_1, \dots, x_s) \in G_s} \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{Ag(x_1, \dots, x_s, t_1, \dots, t_s)}{\sqrt{P_1(t_1) \dots P_s(t_s)}} \times \\ &\times \sqrt{P_1(x_1) \dots P_s(x_s)} Lu(t_1, \dots, t_s) dt_1 \dots dt_s \leq \\ &\leq \max_{(x_1, \dots, x_s) \in G_s} \left(\int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{|Ag(x_1, \dots, x_s, t_1, \dots, t_s)|^2}{P_1(t_1) \dots P_s(t_s)} dt_1 \dots dt_s \right)^{1/2} \|Lu\| \leq M \|Lu\|, \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$\|Lu\| = \left(\int_0^1 \dots \int_0^1 |Lu(t_1, \dots, t_s)|^2 P_1(t_1) \dots P_s(t_s) dt_1 \dots dt_s \right)^{1/2}$$

норма функции $Lu(x_1, x_2, \dots, x_s)$ в пространстве $L_{P_1, \dots, P_s}^2(G_s)$.

Нетрудно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{|Ag(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s, t_1, \dots, t_s) - Ag(x_1^*, \dots, x_s^*, t_1, \dots, t_s)|^2}{P_1(t_1) \dots P_s(t_s)} dt_1 \dots dt_s < \varepsilon^2$$

при всех $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s)$, $(x_1^*, \dots, x_s^*)$, принадлежащих G_s и удовлетворяющих неравенствам

$$|\bar{x}_1 - x_1^*| < \delta, \quad |\bar{x}_2 - x_2^*| < \delta, \quad \dots, \quad |\bar{x}_s - x_s^*| < \delta.$$

Действительно, в силу неравенства Буняковского и второго неравенства условия б) находим, что

$$\begin{aligned} & W(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s) - W(x_1^*, \dots, x_s^*) = \\ & = \left| \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{Ag(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s, t_1, \dots, t_s) - Ag(x_1^*, \dots, x_s^*, t_1, \dots, t_s)}{\sqrt{P_1(t_1) \dots P_s(t_s)}} \times \right. \\ & \quad \times Lu(t_1, \dots, t_s) \sqrt{P_1(t_1) \dots P_s(t_s)} dt_1 \dots dt_s \left| \leq \right. \\ & \leq \left(\int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{|Ag(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s, t_1, \dots, t_s) - Ag(x_1^*, \dots, x_s^*, t_1, \dots, t_s)|^2}{P_1(t_1) \dots P_s(t_s)} dt_1 \dots dt_s \right)^{1/2} \times \\ & \quad \times \left(\int_0^1 \dots \int_0^1 P_1(t_1) \dots P_s(t_s) |Lu(t_1, \dots, t_s)|^2 dt_1 \dots dt_s \right)^{1/2} \leq \varepsilon \|Lu\|. \end{aligned} \quad (41)$$

Неравенства (40) и (41) означают, что оператор TL переводит единичную сферу пространства $L_{P_1, \dots, P_s}^2(G_s)$ в множество ограниченных в совокупности и равностепенно непрерывных функций, т.е. в компактное множество пространства $C = C(G_s)$ непрерывных в кубе G_s функций. Отсюда заключаем, что оператор TL является вполне непрерывным как оператор, переводящий пространство $L_{P_1, \dots, P_s}^2(G_s)$ в пространство $C(G_s)$. Тогда в силу теоремы 1

$$\|P_{n_1, \dots, n_s} TL - TL\|_{L_{P_1, \dots, P_s}^2(G_s)} \rightarrow 0$$

при $n_1, n_2, \dots, n_s \rightarrow \infty$. Следовательно, для достаточно больших $n_1, n_2, \dots, n_s > n_0$ будем иметь

$$\begin{aligned} & \|TL - P_{n_1, \dots, n_s} LT\|_{L_{P_1, \dots, P_s}^2(G_s)} \times \\ & \times \|E - TL\|_{L_{P_1, \dots, P_s}^2(G_s)} \leq q < 1, \end{aligned} \quad (42)$$

где E - единичный оператор. Отсюда по известной теореме (см. [7, с. 200]) оператор $(E - P_{n_1, \dots, n_s} TL)^{-1}$ существует, т.е. для достаточно больших $n_1, n_2, \dots, n_s \geq n_0$ уравнение (39) имеет единственное решение $u_{n_1, n_2, \dots, n_s}(x_1, x_2, \dots, x_s)$. Решение $Lu_0(x_1, x_2, \dots, x_s)$ уравнения (17) и решение $Lu_{n_1, n_2, \dots, n_s}(x_1, x_2, \dots, x_s)$ уравнения (39) связаны соотношением

$$\begin{aligned} & (E - P_{n_1, \dots, n_s} TL)(Lu_0 - Lu_{n_1, n_2, \dots, n_s}) = \\ & = Lu_0 - P_{n_1, \dots, n_s} Lu_0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|Lu_0 - Lu_{n_1, n_2, \dots, n_s}\| \leq \|E - P_{n_1, \dots, n_s} TL\|^{-1} \times \\ \times 2E_{n_1, \dots, n_s}(Lu_0) \left(\int_0^1 P_1(x_1) dx_1 \right)^{1/2} \dots \left(\int_0^1 P_s(x_s) dx_s \right)^{1/2},$$

т.е.

$$\|Lu_0 - Lu_{n_1, n_2, \dots, n_s}\| = O(E_{n_1, \dots, n_s}(Lu_0)). \quad (43)$$

Так как

$$u_0(x) = \int_{G_s} g(x, t) Lu_0(t) dt, \quad (44)$$

$$u_{n_1, n_2, \dots, n_s}(x) = \int_{G_s} g(x, t) Lu_{n_1, n_2, \dots, n_s}(t) dt, \quad (45)$$

то

$$u_0(x) - u_{n_1, n_2, \dots, n_s}(x) = \int_{G_s} g(x, t) [Lu_0(t) - Lu_{n_1, n_2, \dots, n_s}(t)] dt.$$

Отсюда, используя неравенство Буняковского, получим

$$\max_{x \in G_s} |u_0(x) - u_{n_1, n_2, \dots, n_s}(x)| \leq \\ \leq \left(\int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{|g(x_1, \dots, x_s, t_1, \dots, t_s)|^2}{P_1(t_1) \dots P_s(t_s)} dt_1 \dots dt_s \right)^{1/2} \times \\ \times \left(\int_0^1 \dots \int_0^1 [Lu_0(t_1, \dots, t_s) - Lu_{n_1, n_2, \dots, n_s}(t_1, \dots, t_s)]^2 \times \right. \\ \times P_1(t_1) \dots P_s(t_s) dt_1 \dots dt_s \Big)^{1/2} \leq 2M \|E - P_{n_1, n_2, \dots, n_s} TL\|^{-1} \times \\ \times E_{n_1, n_2, \dots, n_s}(Lu_0) \left(\int_0^1 P_1(x_1) dx_1 \right)^{1/2} \dots \left(\int_0^1 P_s(x_s) dx_s \right)^{1/2}.$$

Таким образом,

$$\max_{x \in G} \|u_0(x) - u_{n_1, n_2, \dots, n_s}(x)\| = O(E_{n_1, \dots, n_s}(Lu_0)).$$

Теперь, действуя на обе части равенств (44) и (45) оператором A , получим

$$Au_0(x) = \int_{G_s} Ag(x, t) Lu_0(t) dt, \quad (46)$$

$$Au_{n_1, n_2, \dots, n_s}(x) = \int_{G_s} Ag(x, t) Lu_{n_1, n_2, \dots, n_s}(t) dt \quad (47)$$

Из равенств (46) и (47) находим, что

$$Au_0(x) - Au_{n_1, n_2, \dots, n_s}(x) = \int_{G_s} Ag(x, t) [Lu_0(t) - Lu_{n_1, n_2, \dots, n_s}(t)] dt. \quad (48)$$

Далее, применяя неравенство Буняковского к (48), получаем

$$\max_{x \in G} \|Au_0(x) - Au_{n_1, n_2, \dots, n_s}(x)\| = O(E_{n_1, \dots, n_s}(Lu_0)).$$

Теорема доказана.

Список литературы

- [1] Турецкий А.Х. Теория интерполирования в задачах, Минск, "Высшая школа"(1968).
- [2] Вайникко Г.М. О сходимости и устойчивости метода коллокации // Дифференциальные уравнения, 1965, т. 1, No. 2, с. 244-254.
- [3] Вайникко Г.М. О сходимости метода коллокации для многомерных интегральных уравнений // Ученые записки Тартуского университета, 1970, т. 253, No. 9, с. 244-257.
- [4] Карпиловская Э.Б. О сходимости метода коллокации // Доклады СССР, 1963, т. 151, No. 4, с. 766-769.
- [5] Карпиловская Э.Б. О методе коллокации для интегро-дифференциальных уравнений с бигармонической главной частью // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1970, т. 10, No. 6, с. 1537-1541.
- [6] Ярцев Ю.П. Об одном варианте метода коллокации по линиям // Дифференциальные уравнения, 1970, т. 6, No. 9, с. 1727-1731.
- [7] Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Ружицкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений, Москва, "Наука"(1969).

С.Г.Гасымова

Азербайджанский Технический Университет

E-mail: alievrafig@mail.ru

Received 09 October 2012

Published 27 November 2012