Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 7, No 1, 2017, June
ISSN 2222-5498

Разделяющая система операторов многопараметрической спектральной задачи

М.С. Алмамедов

Аннотация. В этой работе изучается разделение спектральных параметров $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, т.е. устанавливается эквивалентность исходных многопараметрических задач (например, изучение задачи на собственные значения) аналогичной задаче для системы линейных операторов, зависящих только от одного параметра.

Key Words and Phrases: многопараметрическая, спектральная задача, тензорное произведение, тензорные определители.

2010 Mathematics Subject Classifications: 34K08

Многопараметрические спектральные задачи связаны с теорией тензорных произведений нормированных пространств и линейных операторов, действующих в этих пространствах.

Все понятия о тензорных произведениях пространств и линейных операторов считаются известными (см. напр. [1-4]).

Пусть $X_1, ..., X_n$-банаховы пространства, а $X_1 \oplus ... \otimes X_n$ их алгебраическое тензорное произведение, т.е. тензорное произведение линейных пространств $X_1, ..., X_n$. Линейные пространства $X_1 \oplus ... \otimes X_n$ можно снабдить различными нормами, но естественными среди них являются кросснормы, т.е. нормы α на $X_1 \oplus ... \otimes X_n$ удовлетворяющие условию $\alpha (X_1 \oplus ... \otimes X_n) = \|X_1\|_1 ... \|X_n\|_n$ для всех элементов $x_1 \in X_1, ..., x_n \in X_n$.

Важнейшим свойством кросснормы является непрерывная зависимость тензорного произведения элементов от сомножителей. Пополнение алгебраического тензорного произведения $X_1 \oplus ... \otimes X_n$ по кросснорме α называется тензорным произведением банаховых пространств $X_1, ..., X_n$ и обозначается через $X_1 \oplus ... \otimes X_n$.

Рассмотрим гильбертовы пространства $H_1, ..., H_n$ и наделим их алгебраическое тензорное произведение скалярным произведением, полагая для разложимых тензоров $X = X_1 \oplus ... \otimes X_n$ и $Y = Y_1 \oplus ... \otimes Y_n$

$$(X, Y) = (X_1, Y_1)_1 ... (X_n, Y_n)_n .$$

и продолжая по билинейности на все алгебраические тензоры $\sum_p X_1^p \otimes ... \otimes X_n^p$.

Пополняя это линейное пространство по норме, соответствующей введенному скалярному произведению, получим, по определению тензорное произведение $H_1 \otimes ... \otimes H_n$

гильбертовых пространств $H_1, ..., H_n$ (это скалярное произведение порождает равномерную красснорму).

Пусть $\left\{e_{j,\nu_j}\right\}-$полная ортонормированная система в пространстве H_j, $j=\overline{1,n}$. Тогда $\left\{e_{j,\nu_j}\otimes...\otimes e_{n,\nu_n}\right\}$ – полная ортонормированная система гильбертова пространства $H_1\otimes...\otimes H_n$ и каждый элемент z этого пространства представляется в виде

$$z=\sum_{\nu_1,...,\nu_n}\alpha_{\nu_1},_{...,\nu_n}e_{1,\nu_1}\otimes...\otimes e_{n,\nu_n},$$

где числа

$$\alpha_{\nu_1},_{...,\nu_n}=\left(z,e_{1,\nu_1}\otimes...\otimes e_{n,\nu_n}\right),$$

образует квадратично суммируемую последовательность и среды этих чисел, отличных от нуля не более чем счетно, суммирование ведется этим же индексом $\nu_1, ...\nu_n$ (см. [1,2]).

Теперь отметим некоторые свойства тензорного произведения линейных операторов, действующих в гильбертовых пространствах.

Пусть линейные операторы $T_1, ..., T_n$ действуют соответственно в $H_1, ..., H_n$.

Сначала рассмотрим случай ограниченных операторов. Пусть $T_1\otimes...\otimes T_n-$ тензорное произведение операторов $T_1, ..., T_n$ в алгебраическом тензорном произведении $H_1\otimes...\otimes H_n$.

Линейный оператор $T_1\otimes...\otimes T_n$, рассматриваемый в тензорном произведении пространств $H_1, ..., H_n$ может быть продолжен по непрерывности до единственного линейного ограниченного оператора, определенного на всем $H_1\otimes...\otimes H_n$, который и называется тензорным произведением операторов $T_1\otimes...\otimes T_n$.

Операторы $T_1, ..., T_n$ сопоставляются ктензорно-индуцированныеь операторы

$$T_1^t=T_1\otimes I_2\otimes...\otimes I_n, ..., \; T_n^t=I_1\otimes...\otimes I_{n-1}\otimes T_n,$$

действующие в $H_1\otimes...\otimes H_n$.

Операторы $T_1^t, ..., T_n^t$ попарно перестановочны и $T_1\otimes...\otimes T_n=T_1^t, ..., T_n^t$.

Пусть T_j-линейные операторы с областями определения $D\left(T_j\right)\subset H_j$, $j=\overline{1,n}$, среди которых хотя бы один является неограниченным. Тогда под тензорным произведением этих операторов понимается оператор $T_1\otimes...\otimes T_n$ с областью определения $D\left(T_1\otimes...\otimes T_n\right)$, совпадающей с алгебраическим тензорным произведением $D\left(T_1\right)\otimes...\otimes D\left(T_n\right)$, т.е.

$$\left(T_1\otimes...\otimes T_n\right)\sum_p X_1^p\otimes...\otimes X_n^p=\sum_p T_1X_1^p\otimes...\otimes T_nX_n^p,$$

для всех $X_j^p\in D\left(T_j\right)$. $j=\overline{1,n}$.

Если $T_1, ..., T_n-$линейные ограниченные операторы, определенные соответственно в гильбертовых пространствах $H_1, ..., H_n$, то имеет место

$$\left(T_1\otimes...\otimes T_n\right)^*=T_1^*\otimes...\otimes T_n^*,$$

и поэтому условия самосопряженности, унитарности, нормальности, проекционности всех операторов $T_1, ..., T_n$ наследуются на их тензорные произведение.

Пусть каждый из операторов T_j , $j = \overline{1, n}$ определен на плотном в H линейном многообразии $D(T_j)$, $j = \overline{1, n}$. Тогда $D(T_1) \otimes ... \otimes D(T_n)$ является плотным в $H_1 \otimes ... \otimes H_n$ и поэтому определен оператор $(T_1 \otimes ... \otimes T_n)^*$.

Легко видеть, что

$$T_1^* \otimes ... \otimes T_n^* \subset (T_1 \otimes ... \otimes T_n) .$$

Если операторы $T_1, ..., T_n$ допускает замыкание, то их тензорное произведение тоже обладает этим свойством и для замыкания оператора $T_1 \otimes ... \otimes T_n$ справедливо включение

$$\overline{T_1 \otimes ... \otimes T_n} \subset (T_1^* \otimes ... \otimes T_n^*) .$$

Пусть операторы $T_1, ..., T_n$ самосопряженные. Тогда их тензорное произведение является с существенном самосопряженным, т.е. $\overline{T_1 \otimes ... \otimes T_n}$–самосопряженный оператор. В частности, оператор $T_1^t, ..., T_n^t$–в существенном самосопряженные. Поэтому если $E_{T_1}, ..., E_{T_n}$ спектральные меры операторов $T_1, ..., T_n$ соответственно, то спектральной мерой оператора $\overline{T_j^t}$ служит оператор $E_{T_j}^t$, $j = \overline{1, n}$ (см. [1,5]).

Если $H_1, ..., H_n$ гильбертово тензорное пространство, то их гильбертово тензорное пространство обозначим через H, т.е. $H = H_1 \otimes ... \otimes H_n$.

Основная многопараметрическая задача с изучением операторно-голоморфного отображения

$$P(\lambda) = (P_1(\lambda), ..., P_n(\lambda)) \ , \ \ \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in C^n,$$

$$P_j(\lambda) = A_j + \lambda_1 B_{j1} + ... + \lambda_n B_{jn} \ , \ \ j = \overline{1, n},$$

где операторы $A_j, B_{j1}, ..., B_{jn}$ действуют в гильбертовом пространстве H_j, $j = \overline{1, n}$. Каждая из оператор-функций $P_j(\lambda)$ определена в ксвоемь пространстве H_j и зависит вообще говоря от всех параметров $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Мы хотим провести кразделениеь спектральных параметров $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, т.е. установить эквивалентность исходных многопараметрических задач (например, изучение задачи на собственные значения, изучение спектра и т.д.) аналогичной задаче для системы линейных операторов, зависящих только от одного параметра. Эти операторы будут называться разделяющими и они будут обладать свойствами (типа попарной перестановочности), позволяющими провести анализ этой разделяющей системы, и тем самым, исходной многопараметрической задачи (см. [6-8]).

Рассмотрим случай ограниченных операторов A_j , B_{jk}

$$B_{11}^t = B_{11} \otimes I_2 \otimes ... \otimes I_n, ..., B_{1n}^t = B_{1n} \otimes I_2 \otimes ... \otimes I_n, ...,$$

$$B_{n1}^t = I_1 \otimes ... \otimes I_{n-1} \otimes B_{n1}, ..., B_{nn}^t = I_1 \otimes ... \otimes I_{n-1} \otimes B_{nn}.$$

Операторы B_{jk}^t тоже ограничены, более того

$$\left\| B_{jk}^t \right\| = \left\| B_{jk} \right\| .$$

Далее,

$B^t_{jk} B^t_{j'k'} = B^t_{j'k'} B^t_{jk}$, если $j \neq j'$, $\forall k, k' \in (1, 2, ..., n)$.

Введем оператор

$$\Delta_0 = \det \begin{Vmatrix} B^t_{11} & \cdots & B^t_{1n} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ B^t_{n1} & \ldots & B^t_{nn} \end{Vmatrix} = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma B^t_{1\sigma(1)} ... B^t_{n\sigma(n)},$$

где $\sigma = (\sigma(1), ..., \sigma(n))$ $-$пробегает множество всех перестановок чисел $1, 2, ..., n$ и $\varepsilon_\sigma$$-$четность перестановки $\sigma, \sigma(1), ..., \sigma(n)$ являются номерами столбцов, в которых расположены сомножители произведения.

Очевидно, что

$$\Delta_0 = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma B_{1\sigma(1)} ... B_{n\sigma(n)}.$$

$\Delta_0$$-$ограниченный оператор, действующий в $H = H_1 \otimes ... \otimes H_n$. Для Δ_0 справедливы аналоги различных утверждений теории определителей, сформулированных в терминах столбцов, например,

1. Если два столбца менять местами, то знак Δ_0 меняется (Заметим, что если менять местами две строки, то полученный оператор действует уже не в H!).
2. Если два столбца одинаковы, то $\Delta_0 = 0$.
3. Δ_0 не изменится, если к элементам одного из его столбцов прибавить соответствующие элементы любого другого столбца, умноженные на фиксированное число.
4. Если $B_{ij} = \alpha B_i + \beta C_i$, т.е. все элементы j-го столбца представлены в виде линейной комбинации двух слагаемых, то $\Delta_0 = \alpha\Delta'_0 + \beta\Delta''_0$, где Δ'_0 $(\Delta''_0)$$j$-ый столбец состоит из операторов B_i (C_i), а все другие столбцы такие же, как Δ_0.

Через $\Delta_0^{(j,k)}$$-$обозначим алгебраическое дополнение элемента B^t_{jk}, т.е.

$$\Delta_0^{(j,k)} = (-1)^{j+k} \det \begin{Vmatrix} & \vdots & \\ \ldots & B^t_{jk} & \ldots \\ & \vdots & \end{Vmatrix}.$$

Например, при $n = 2$ имеем

$$\Delta_0^{(1,1)} = (-1)^{1+1} B^t_{22} = I_1 \otimes B_{22} \,, \ \Delta_0^{(1,2)} = -I_1 \otimes B_{21};$$

$$\Delta_0^{(2,1)} = -B_{12} \otimes I_2 \,, \ \Delta_0^{(2,2)} = B_{11} \otimes I_2.$$

Операторы $\Delta_0^{(j,k)}$ тоже действуют в $H = \overset{n}{\underset{j=1}{\otimes}} H_j$!.

Однако, $\Delta_0^{(j,k)}$ коставляет неизменной j-ую координату H_j пространства H.њ!

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{j=1}^{n} B_{jk}^{t}\Delta_0^{(j,s)} = \sum_{j=1}^{n}\Delta_0^{(j,s)}B_{jk}^{t} = \begin{cases} \Delta_0\,,\ k=s\,,\\ 0\,,\ k\neq s\,. \end{cases}$$

Вообще говоря, нельзя утверждать, что $\sum_{k=1}^{n} B_{jk}^{t}\Delta_0^{(r,k)} = \delta_{jr}\Delta_0$, т.е. сумма формально отвечает определителю, где r -ая строка заменена с j-ой. Этот определитель не обладает нужными коммутативными свойствами.

Рассмотрим многопараметрическое отображение

$$P(\lambda) = (P_1(\lambda), ..., P_n(\lambda)).$$

Пусть операторы $A_1, ..., A_n$ тоже ограничены.

Введем аналогичным образом операторы

$$\Delta_1 = \det\begin{Vmatrix} -A_1^t & B_{12}^t & \ldots & B_{1n}^t \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ -A_n^t & B_{n2}^t & \cdots & B_{nn}^t \end{Vmatrix}, ..., \Delta_n = \det\begin{Vmatrix} B_{11}^t & \ldots & B_{1,n-1}^t & -A_1^t \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ B_{n1}^t & \cdots & B_{n,n-1}^t & -A_n^t \end{Vmatrix}.$$

Теорема 0.1. *Пусть $\Delta_s^{(j,k)}$–формальное алгебраическое дополнение элемента B_{jk}^t в определители Δ_s, $s\neq k$. Тогда для всех $x\in H_1\otimes...\otimes H_n$ справедливо соотношение*

$$\sum_{j=1}^{n} B_{jm}^{t}\Delta_s^{(j,k)}x = \sum_{j=1}^{n}\Delta_s^{(j,k)}B_{jm}^{t}x = \begin{cases} \Delta_s x\,,\ m=k\,,\ s\neq k\,,\\ -\Delta_k x\,,\ m=s\,,\ s\neq k\,,\\ 0\,,\ m\neq k\,,\ m\neq s\,, \end{cases}$$

$$m=\overline{0,n}\,,\ s=\overline{0,n}\,,\ k=\overline{0,n}\,,\ j=\overline{1,n}\,.$$

Здесь произведения $B_{jm}^t\Delta_s^{(j,k)}$ определены для произвольных операторов $B_{j0}, B_{j1}, ..., B_{jn}$, $j=\overline{1,n}$ без ограничения на их область определения и области значения.

Доказательство. (см. [9]) Первая формула есть разложение Δ_s относительно k-го столбца. Во второй формуле из определения Δ_s вычеркивается столбец, содержащий оператор B_{jk}^t и на его месте пишется столбец, содержащий B_{js}^t. После перестановки столбцов получается Δ_k с обратным знаком (минус из-за перестановки).

В третьем случае из определителя Δ_s вычеркивается столбец с B_{jk}^t и вводится в замен столбец с B_{jm}^t и т.к. $m\neq k, m\neq s$, то получается определитель с двумя одинаковыми столбцами ($B_{jm}^t, j=\overline{1,n}$).

Замечание 1. Нетрудно видеть, что определитель Δ_s можно ввести с помощью тензорно-индуциированных операторов следующим образом:

$$\Delta_s = (-1)^s\det\begin{Vmatrix} B_{10}^t & B_{11}^t & \cdots & B_{1,s-1}^t & B_{1,s+1}^t & \cdots & B_{1n}^t \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ B_{n0}^t & B_{n1}^t & \cdots & B_{n,s-1}^t & B_{n,s+1}^t & \cdots & B_{nn}^t \end{Vmatrix},$$

здесь $A_j = B_{j0}$ или

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \Delta_k = \det \left\| \begin{array}{cccc} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ A_1 & B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ . & . & \cdots & . \\ A_n & B_{n1} & \cdots & B_{nn} \end{array} \right\|.$$

Замечание 2. Пусть $X = X_1 \otimes ... \otimes X_n \in H$. Тогда

$$(\Delta_0 X, X) = \left(\sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma B_{1\sigma(1)} X_1 \otimes B_{n\sigma(n)} X_n, X_1 \otimes ... \otimes X_n \right) =$$

$$\sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma \left(B_{1\sigma(1)} X_1, X_1 \right) ... \left(B_{n\sigma(n)} X_n, X_n \right) = \det \left\| \begin{array}{c} (B_{11} X_1, X_1) ... (B_{1n} X_1, X_1) \\ .... \\ (B_{n1} X_n, X_n) ... (B_{nn} X_n, X_n) \end{array} \right\|.$$

Таким образом, условие $W-$определенности означает, что $(\Delta_0 X, X) \neq 0$ на ненулевых разложимых тензорах.

Соответственно, условие определенности означает:

$$\inf_{\substack{\|X_j\| = 1 \\ j = \overline{1,n}}} |(\Delta_0 X, X)| > 0, \text{ где } X = X_1 \otimes ... \otimes X_n.$$

Теорема 0.2 ([10]). *Пусть $B_{jk} = B_{jk}^*$ и пусть $\Delta_0 >> 0$ на разложимых тензорах из H. Тогда $\Delta_0 >> 0$ в H.*

Список литературы

[1] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Наукова Думка, Киев, 1965.

[2] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, I. Функциональный анализ. Мир, М., 1977.

[3] Sleeman B.D. Singular linear differential operators with many parameters. Proc. Roy. Edinb., 1973, A71, No. 3, pp. 199-232.

[4] Sleeman B.D. Multiparameter spectral theory in Hilbert space. Res. Notes Math., Pitman, 1978, v.28, pp. 1-118.

[5] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. Мир, М., 1978.

[6] Atkinson F.V. Multiparameter eigenvalue problems. V1. Matrices and compact operators. Acad. Pres. No. 4, 1972, pp. 1-209.

[7] Исаев Г.А. Избранные вопросы многопараметрической спектральной теории. Автореф. докт. дисс., 1982.

[8] Isaev H.A., Browne P.J. Symmetric multiparameter problems and deficiency index theory. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1988, v. 131, pp. 481-488.

[9] Atkinson F.V. Multiparameter spectral theory. Bull. Amer. Math. Soc., 1968, v. 74, pp. 1-27

[10] Binding P., Browne P.J. Positivity results for determinantal operators. Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1978, 81A, pp. 267-271.

[11] Исаев Г.А. К многопараметрической спектральной теории. Докл. АН СССР, 1976, т. 229, No. 2, с. 284-286.

[12] Kallstrom A., Sleeman B.D. J. Math. Anal. Appl., 1976, v. 55, pp. 785-793

[13] Исаев Г.А., Файнштейн А.С. О совместных спектрах конечных коммутативных семейств. Сб. "Спектральная теория операторов вып. 3, Элм, Баку, 1980, с. 222-257

[14] Алмамедов М.С., Исаев Г.А. Разрешимость несамосопряженных линейных операторных систем и множество разложимости многопараметрических спектральных задач. Докл. АН СССР, 1985, т. 282, No. 3, с. 521-523.

Алмамедов М.С.
Азербайджанский Государственный Экономический Университет

Received 5 May 2017
Accepted 20 May 2017