

Кубатурная формула для акустического потенциала двойного слоя

Э.Г. Халилов

Аннотация. In the paper, we construct a cubature formula for acoustic double layer potential.

Key Words and Phrases: cubature formula, double layer potential, surface.

2000 Mathematics Subject Classifications: 65D32

Краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца приводятся к решению граничных интегральных уравнений (ГИУ), зависящие от акустического потенциала двойного слоя (см.[2]). Известно, что во многих случаях не возможно найти точное решение ГИУ. Поэтому возникает интерес к приближенному решению этих ГИУ (см.[4]-[7]). С этой целью, сначала надо построить кубатурную формулу для акустического потенциала двойного слоя.

Построим последовательность разбиений поверхности S . Для этого введем последовательность $\{h\} \subset R$ значений параметра дискретизации h , стремящаяся к нулю. Разобьем S на элементарные области $S = \bigcup_{l=1}^{N(h)} S_l^h$:

(1) для любого $l \in \{1, 2, \dots, N(h)\}$ S_l^h замкнуто и его множество внутренних относительно S точек $\overset{0}{S}_l^h$ не пусто, причем $mes \overset{0}{S}_l^h = mes S_l^h$ и при $j \in \{1, 2, \dots, N(h)\}$, $j \neq l$, $\overset{0}{S}_l^h \cap \overset{0}{S}_j^h = \emptyset$;

(2) для любого $l \in \{1, 2, \dots, N(h)\}$ S_l^h представляет собой связный кусок поверхности S с непрерывной границей;

(3) для любого $l \in \{1, 2, \dots, N(h)\}$ $diam S_l^h \leq h$;

(4) для любого $l \in \{1, 2, \dots, N(h)\}$ существует так называемая опорная точка $x_l \in S_l^h$, такая, что:

$$(4.1) \quad r_l(h) \sim R_l(h), \text{ где } r_l(h) = \min_{x \in \partial S_l^h} |x - x_l| \text{ и } R_l(h) = \max_{x \in \partial S_l^h} |x - x_l|;$$

$$(4.2) \quad R_l(h) \leq \frac{d}{2}, \text{ где } d - \text{ радиус стандартной сферы ([1]);}$$

$$(4.3) \quad \text{для любого } j \in \{1, 2, \dots, N(h)\} \quad r_j(h) \sim r_l(h).$$

Очевидно, что

$$r(h) \sim R(h),$$

где

$$R(h) = \max_{l=1, N(h)} R_l(h), \quad r(h) = \min_{l=1, N(h)} r_l(h) .$$

Пусть $S_d(x)$ и $\Gamma_d(x)$ - части, соответственно, поверхности S и касательной плоскости $\Gamma(x)$ в точке $x \in S$, заключенные внутри сферы $B_d(x)$ радиуса d с центром в точке x . Кроме того, пусть $\tilde{y} \in \Gamma(x)$ проекция точки $y \in S$.

Тогда

$$|x - \tilde{y}| \leq |x - y| \leq C_1(S) \cdot |x - \tilde{y}| \quad (1)$$

и

$$mes S_d(x) \leq C_2(S) \cdot mes \Gamma_d(x) , \quad (2)$$

где $C_1(S)$ и $C_2(S)$ положительные постоянные, зависящие лишь от S (если S - сфера, то $C_1(S) = \sqrt{2}$ и $C_2(S) = 2$).

Справедлива следующая

Лемма (см.[3]). *Существуют такие постоянные $C'_0 > 0$ и $C'_1 > 0$ не зависящие от h , для которых при $j \in \{1, 2, \dots, N(h)\}$, $j \neq l$ и любом $x \in S_j^h$ справедливо следующее неравенство*

$$C'_0 \cdot |x - x_l| \leq |x_j - x_l| \leq C'_1 \cdot |x - x_l| . \quad (3)$$

Потенциала двойного слоя

$$K(x) = \int_S \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} \rho(y) d\sigma_y,$$

можно представить в виде

$$K(x) = L(x) + \rho(x) \cdot F(x), \quad x \in S , \quad (4)$$

где

$$L(x) = \int_S (\rho(y) - \rho(x)) \cdot \frac{\partial \left(\frac{\exp(i k |x-y|)}{4\pi |x-y|} \right)}{\partial \vec{n}(y)} d\sigma_y, \quad x \in S , \quad (5)$$

и

$$F(x) = \int_S \frac{\partial \left(\frac{\exp(i k |x-y|)}{4\pi |x-y|} \right)}{\partial \vec{n}(y)} d\sigma_y, \quad x \in S . \quad (6)$$

Сначала построим кубатурную формулу для интегралов (5), (6) .

$$L^{N(h)}(x_l) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{N(h)} (\rho(x_j) - \rho(x_l)) \cdot \frac{\partial \left(\frac{\exp(ik|x_l - x_j|)}{4\pi|x_l - x_j|} \right)}{\partial \vec{n}(x_j)} mesS_j^h \quad (7)$$

в точках $x_l, l = \overline{1, N(h)}$, является кубатурной формулой для интеграла (5). Оценим погрешность кубатурной формулы (7).

Очевидно, что

$$r^{N(h)}(x_l) = \int_{S_l^h} (\rho(y) - \rho(x_l)) \cdot \frac{\partial \left(\frac{\exp(ik|x_l - y|)}{4\pi|x_l - y|} \right)}{\partial \vec{n}(x_j)} d\sigma_y + \left[\int_{S/S_l^h} (\rho(y) - \rho(x_l)) \cdot \frac{\partial \left(\frac{\exp(ik|x_l - y|)}{4\pi|x_l - y|} \right)}{\partial \vec{n}(x_j)} d\sigma_y - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{N(h)} (\rho(x_j) - \rho(x_l)) \cdot \frac{\partial \left(\frac{\exp(ik|x_l - x_j|)}{4\pi|x_l - x_j|} \right)}{\partial \vec{n}(x_j)} \cdot mesS_j^h \right] = r_1^{N(h)}(x_l) + r_2^{N(h)}(x_l) .$$

Оценим выражение $r_1^{N(h)}(x_l)$. Можно показать, что

$$\frac{\partial \left(\frac{\exp(ik|x - y|)}{4\pi|x - y|} \right)}{\partial \vec{n}(y)} = -\frac{\cos(\vec{xy}^\wedge, \vec{n}(y))}{4\pi|x - y|^2} \cdot (1 - ik|x - y|) \cdot \exp(ik|x - y|) \quad (8)$$

Ясно, что для любых $x, y \in S$

$$|(1 - ik|x - y|) \cdot \exp(ik|x - y|)| \leq 1 + |k| \cdot diamS . \quad (9)$$

Учитывая, что S —поверхность Ляпунова с показателем α

$$|\cos(\vec{xy}^\wedge, \vec{n}(y))| \leq c_\alpha \cdot |x - y|^\alpha \quad (10)$$

(здесь $c_\alpha = \text{const}$) и опираясь на (9), получим:

$$\begin{aligned}
 \left| r_1^{N(h)}(x_l) \right| &\leq \frac{1}{4\pi} \int_{S_l^h} \frac{|\cos(\vec{x_l y}^\wedge, \vec{n}(y))|}{|x_l - y|^2} \cdot |(1 - ik|x_l - y|) \exp(ik|x_l - y|)| \cdot |\rho(y) - \rho(x_l)| \cdot d\sigma_y \leq \\
 &\leq \frac{c_\alpha}{2\pi} \cdot (1 + |k| \text{diam} S) \cdot \int_{S_l^h} \frac{\omega_\rho(|x_l - y|)}{|x_l - y|^{2-\alpha}} d\sigma_y \leq \frac{c_\alpha}{2\pi} \cdot (1 + |k| \text{diam} S) \cdot c_2(S) \int_0^{2\pi} \int_0^{R_l(h)} \frac{\omega_\rho(\tau)}{\tau^{1-\alpha}} d\tau d\varphi \leq \\
 &\leq c_\alpha \cdot c_2(S) \cdot (1 + |k| \text{diam} S) \cdot \int_0^{R(h)} \frac{\omega_\rho(\tau)}{\tau^{1-\alpha}} d\tau .
 \end{aligned} \tag{11}$$

Аналогично, имеем

$$\begin{aligned}
 \left| r_2^{N(h)}(x_l) \right| &\leq 2 \cdot M_1 \cdot \max \left\{ \frac{(\text{diam} S)^{2-\alpha} \cdot \text{mes} S}{d^{3-\alpha}(\text{diam} S - \alpha)}, 2\pi c_2(S) \right\} \cdot R(h) \cdot \int_{r(h)/c_1(S)}^{\text{diam} S} \frac{\omega_\rho(\tau)}{\tau^{2-\alpha}} d\tau + \\
 + 2 \cdot \max \left\{ \frac{\text{diam} S \cdot \text{mes} S}{d^2(\text{diam} S - \alpha)}, 2\pi c_2(S) \right\} \cdot \left(M_2 \cdot \omega_\rho(R(h)) \cdot \int_{r(h)/c_1(S)}^{\text{diam} S} \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}} + M_3 (R(h))^\alpha \times \right. \\
 \left. \times \int_{r(h)/c_1(S)}^{\text{diam} S} \frac{\omega_\rho(\tau)}{\tau} d\tau \right) .
 \end{aligned} \tag{12}$$

Суммируя оценки (11) и (12), получим доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть S - поверхность Ляпунова с показателем α . Тогда справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned}
 \max_{l=1, N(h)} |L(x_l) - L^{N(h)}(x_l)| &\leq \text{const} \cdot \left[\int_0^{R(h)} \frac{\omega_\rho(\tau)}{\tau^{1-\alpha}} d\tau + R(h) \cdot \int_{r(h)/c_1(S)}^{\text{diam} S} \frac{\omega_\rho(\tau)}{\tau^{2-\alpha}} d\tau + (R(h))^\alpha \times \right. \\
 &\left. \int_{r(h)/c_1(S)}^{\text{diam} S} \frac{\omega_\rho(\tau)}{\tau} d\tau + \omega_\rho(R(h)) \right] .
 \end{aligned}$$

Теперь построим кубатурную формулу для интеграла (6).

Выражение

$$F^{N(h)}(x_l) = 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{N(h)} \frac{\partial \left(\frac{\exp(ik|x_l - x_j|)}{4\pi|x_l - x_j|} \right)}{\partial \vec{n}(x_j)} \text{mes} S_j^h \tag{13}$$

в точках x_l , $l = \overline{1, N(h)}$, является кубатурной формулой для интеграла (6).

Аналогично можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть S поверхность Ляпунова с показателем α . Тогда справедлива следующая оценка

$$\max_{l=\overline{1, N(h)}} |F(x_l) - F^{N(h)}(x_l)| \leq \text{const} \cdot [(R(h))^{-\alpha} |\ln r(h)|] .$$

Исходя из кубатурных формул (7) и (13), получим, что выражение

$$K^{N(h)}(x_l) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{N(h)} \frac{\partial \left(\frac{\exp(ik|x_l - x_j|)}{4\pi|x_l - x_j|} \right)}{\partial \vec{n}(x_j)} \rho(x_j) \text{mes} S_j^h \quad (14)$$

в точках x_l , $l = \overline{1, N(h)}$, является кубатурной формулой для интеграла (4).

Из теорем 1 и 2, получим справедливость следующей оценки:

$$\begin{aligned} \max_{l=\overline{1, N(h)}} |K(x_l) - K^{N(h)}(x_l)| &\leq \text{const} \cdot [\|\rho\|_{\infty} \cdot (R(h))^{\alpha} \cdot |\ln r(h)| \\ &+ \omega_{\rho}(R(h)) + \int_0^{R(h)} \frac{\omega_{\rho}(\tau)}{\tau^{1-\alpha}} d\tau + (R(h))^{\alpha} \cdot \int_{r(h)/c_1(S)}^{\text{diam} S} \frac{\omega_{\rho}(\tau)}{\tau} d\tau] . \end{aligned} \quad (15)$$

Список литературы

- [1] Владимиров В.С. Уравнения математической физики-М.: Наука, 1976-527с.
- [2] Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния-М.: Мир, 1987-311с.
- [3] Кустов Ю.А., Мусаев Б.И. Кубатурная формула для двумерного сингулярного интеграла и ее приложения – Деп. В ВИНТИ. No.4281-81-60с.
- [4] Khalilov E.H. An approximate solution of one class of boundary integral equation // Trans. Az.Nat.Acad.Sciences, ser. of phys-tech and math.sciences, Baku, 2004, v.XXIV, No.1, p.155-160.

- [5] Абдуллаев Ф.А. , Халилов Э.Г. Обоснование метода коллокации для одного класса граничных интегральных уравнений // Дифференциальные уравнения, 2004, т. 40, No.1, с. 82-86
- [6] Mustafa N. and Khalilov E.H. The collocation method for solution of boundary integral equations. Applicable Analysis ,2009, vol. 88,No.12, p. 1665-1675.
- [7] Khalilov E.H. On an approximate solution of a boundary integral equation of mixed problem for Helmholtz equation // Proceedings of institute of Mathematics and Mechanics of NASA, v.31 (39), Baku, 2009, p.105-110.

Э.Г. Халилов

Азербайджанская Государственная Нефтяная Академия

Received 11 October 2012

Published 29 November 2012