Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 7, No 1, 2017, June
ISSN 2222-5498

Пространство Коэффициентов в Интионистик Метрическом Пространстве. Критерий Базисности

Гулиева Ф.А.

Аннотация. В этой работе рассматривается fuzzy метрическое линейное пространство. Вводятся понятия fuzzy полноты, fuzzy минимальности, fuzzy биортогональности, fuzzy базисности, а также fuzzy пространство коэффициентов. Доказаны сильная полнота fuzzy пространства коэффициентов относительно fuzzy метрики и сильная базисность канонической системы в нем. Приведен критерий сильной базисности в fuzzy метрическом линейном пространстве на языке коэффициентного оператора.

Key Words and Phrases: Fuzzy полнота, Fuzzy минимальность, Fuzzy биортогональность, Fuzzy базисность.

2010 Mathematics Subject Classifications: 46A35, 46S40, 26E50

1. Введение

Основы fuzzy теории положено в знаменитой работе Lutfi-zade 1965 г. В этой работе введены понятия fuzzy множество, fuzzy отношение, определены множественные операции (объединение, пересечение, дополнение, алгебраическая сумма и т.п.) над fuzzy множествами. Изучены некоторые основные свойства этих операций, рассмотрены также другие вопросы, связанные с fuzzy множествами. После этой основополагающей работы интерес к этому направлению сильно возрос. Были найдены широкие применения этого подхода изучения неопределенностей в различных областях математики, прикладной математики и естествознания.

Следует отметить, что fuzzy теория является альтернативным к теории вероятностей языком изучения неопределенностей. Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим следующее обстоятельство.

Понятие пространство коэффициентов было введено в связи с базисами в банаховых пространствах. Оно определяется конкретным базисом и оператор разложения по базису (мы его называем коэффициентным оператором) задает изоморфизм между ним и самом пространством. Это пространство есть банахово пространство скалярных последовательностей с соответствующей нормой. В последующем пространство коэффициентов было определено и для других систем (могут не являться базисом) в банаховых пространствах. Относительно этих сведений можно ознакомиться в монографиях Ch.Heil [11], и Б.Т. Билалов, С.Г.Велиев [12]. Понятие пространство коэффициентов играет исключительную роль и в теории фреймов. Определения понятий атомарных разложений и фреймов напрямую связаны с этим понятием. В связи с этим в работах Б.Т.Билалов [13, 14, 1, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 5, 21, 6, 7, 22, 10] это понятие было определено в разных топологических структурах и изучены некоторые характеризующие их свойства.

В этой работе рассматривается fuzzy метрическое линейное пространство. Вводятся понятия fuzzy полноты, fuzzy минимальности, fuzzy биортогональности, fuzzy базисности, а также fuzzy пространство коэффициентов. Доказаны сильная полнота fuzzy пространства коэффициентов относительно fuzzy метрики и сильная базисность канонической системы в нем. Приведен критерий сильной базисности в fuzzy метрическом линейном пространстве на языке коэффициентного оператора.

2. Необходимые сведения и основные предположения

Примем следующие стандартные обозначения. $N-$множество натуральных чисел; R-are real numbers; K-поле скаляров (K либо R, либо C комплексные числа). Будем приводить некоторые понятия и факты из теории IFMS, которые при дальнейшем изложении нам пригодятся.

Определение 2.1. Пусть $(X;\mu;\nu)$ fuzzy метрическое пространство и $\{x_n\}_{n\in N}\subset X$ некоторая последовательность. Будем говорить, что она интионистик сильно fuzzy сходится (коротко $x_n \overset{s}{\to} x,\ n\to\infty$, или $s-\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$) к $x\in X$ тогда и только тогда когда для $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0=n_0\left(\varepsilon\right):\ \mu\left(x_n;x;\,t\right)\geq 1-\varepsilon,\ \nu(x_n;x;\,t)\leq\varepsilon\,,\ \forall n\geq n_0\,,\ \forall t\in R.$

Определение 2.2. Пусть $(X;\mu;\nu)$ fuzzy метрическое пространство и $\{x_n\}_{n\in N}\subset X$ некоторая последовательность. Будем говорить, что она является сильно фундаментальная (Коши) последовательность, если $\lim\limits_{n,m\to\infty}\mu\left(x_n;x_m;t\right)=1$, $\lim\limits_{n,m\to\infty}\nu\left(x_n;x_m;t\right)=0$, равномерно по $t\in R$. Если каждая сильно фундаментальная последовательность сходится (сильно) в X, то $(X;\mu;\nu)$ назовем сильно полное fuzzy метрическим пространством.

Следует отметить, что этими и другими понятиями более подробно можно ознакомится из работ [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10].

Пусть $(X;\mu;\nu)$ есть IFMS. Пусть $M\subset X$ некоторое множество. Через $L\left[M\right]$ будем обозначать линейную оболочку M в X. Замыкание $L\left[M\right]$ по сильной (слабой) интионистик fuzzy сходимости обозначим через $\overline{L_s\left[M\right]}$ ($\overline{L_w\left[M\right]}$). Если X относительно сильной (слабой) интионистик fuzzy сходимости полное, то его назовем интионистик fuzzy сильное (слабое) метрическое пространство: коротко IFM_sS или X_s (IFM_wS или X_w). Пусть X является IFB_sS (IFB_wS) пространством. Линейное пространство над тем же полем K линейных, непрерывных в IFM_sS (IFM_wS) функционалов обозначим через X_s^* (X_w^*). Определим соответствующие понятия теории базисов в IFMS.

Итак, пусть $\{x_n\}_{n\in N}\subset X$ некоторая система.

Определение 2.3. Систему $\{x_n\}_{n\in N}$ назовем s-полным (w-полным) в X_s (в X_w), если $\overline{L_s\left[\{x_n\}_{n\in N}\right]} \equiv X_s$ ($\overline{L_w\left[\{x_n\}_{n\in N}\right]} \equiv X_w$).

Определение 2.4. Систему $\{x_n^*\}_{n\in N} \subset X_s^*$ ($\{x_n^*\}_{n\in N} \subset X_w^*$) назовем s-биортогональной (w-биортогональной) к системе $\{x_n\}_{n\in N}$, если $x_n^*(x_k) = \delta_{nk}$, $\forall n,k \in N$, где $\delta_{nk}-$символ Кронекера.

Определение 2.5. Систему $\{x_n\}_{n\in N} \subset X_s$ ($\{x_n\}_{n\in N} \subset X_w$) назовем s-линейно (w-линейно) независимой в X, если из $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n = 0$ в X_s (в X_w) следует $\lambda_n = 0$, $\forall n \in N$.

Определение 2.6. Систему $\{x_n\}_{n\in N} \subset X_s$ ($\{x_n\}_{n\in N} \subset X_w$) назовем s-базисом (w-базисом) в X_s (в X_w) если для $\forall x \in X$, $\exists!$ $\{\lambda_n\}_{n\in N} \subset K : \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n = x$ в X_s (в X_w).

При получении основных результатов будем пользоваться следующими условиями на $IFMS$.

α) *Линейные операции сложения и умножения в IFM_sS (IFM_wS) сильно (слабо) непрерывны в X, т.е. из $\lambda_n \to \lambda$, $n\to\infty$, в C и из $x_n \overset{s}{\to} x$, $y_n \overset{s}{\to} y$, $n\to\infty$, в X_s ($x_n \overset{w}{\to} x$, $y_n \overset{w}{\to} y$, $n\to\infty$ в X_w) следует, что $\lambda_n x_n \overset{s}{\to} \lambda x$, $x_n + y_n \overset{s}{\to} x+y$, $n\to\infty$, в X_s ($\lambda_n x_n \overset{w}{\to} \lambda x$, $x_n + y_n \overset{w}{\to} x+y$, $n\to\infty$, в X_w) .*

β) *Пусть $\tau_{\mu,\nu}$ топология в X_s, порожденная парой (μ,ν). Будем считать, что ограниченность множества в X_s относительно топологии $\tau_{\mu,\nu}$ и в пространстве IFM_sS $(X;\mu;\nu)$ эквивалентны, т.е. эти понятия в пространствах $(X;\tau_{\mu;\nu})$ и $(X;\mu;\nu)$ одинаковы.*

3. Основные результаты

Пусть $(X;\mu;\nu)$ есть некоторое полное IFM_sS, обладающее свойствами α), β) и $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ некоторая невырожденная система. Положим

$$\mathscr{K}_{\bar{x}}^s \equiv \left\{ \{\lambda_n\}_{n\in N} \subset C : \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n \ \text{ сходится } \ \text{в } X_s \right\}.$$

Очевидно, что относительно обычных операций покомпонентного сложения и умножения на скаляр, $\mathscr{K}_{\bar{x}}^s$ превращается в линейное пространство. Возьмем

$$\forall \bar{\lambda}, \bar{\mu} \in \mathscr{K}_{\bar{x}}^s, \bar{\lambda} \equiv \{\lambda_n\}_{n\in N}, \bar{\mu} \equiv \{\mu_n\}_{n\in N},$$

и определим

$$\mu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\bar{\lambda};\bar{\mu};t\right) = \inf_m \mu\left(\sum_{n=1}^{m}\lambda_n x_n; \sum_{n=1}^{m}\mu_n x_n; t\right),$$

$$\nu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\bar{\lambda};\bar{\mu};t\right) = \sup_m \nu\left(\sum_{n=1}^{m}\lambda_n x_n; \sum_{n=1}^{m}\mu_n x_n; t\right).$$

Покажем, что $\mu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}$ и $\nu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}$ удовлетворяют условиям 1)-11). Сперва рассмотрим $\mu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}$.

1) Ясно, что

$$\mu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\bar{\lambda};\bar{\mu};t\right)=0,\ \forall t\leq 0.$$

2) Пусть

$$\mu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\bar{\lambda};\bar{\mu};t\right)=1,\ \forall t>0.$$

Следовательно

$$\mu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\sum_{n=1}^{m}\lambda_n x_n;\sum_{n=1}^{m}\mu_n x_n;t\right)=1,\ \forall m\in N,\ \forall t>0.$$

Предположим, что система является невырожденной. Из предыдущих соотношений при $m=1$ получаем

$$\mu\left(\lambda_1 x_1;\mu_1 x_1;t\right)=1,\ \forall t>0.$$

Следовательно, $\lambda_1 x_1=\mu_1 x_1 \Rightarrow \lambda_1=\mu_1$. Продолжив этот процесс в итоге получаем $\lambda_n=\mu_n$, $\forall n\in N$, т.е. $\bar{\lambda}=\bar{\mu}$.

3) Ясно, что

$$\mu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\bar{\lambda};\bar{\mu};t\right)=\mu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\bar{\mu};\bar{\lambda};t\right),\ \forall t\in R.$$

4) Пусть $\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\nu}\in\mathscr{K}_{\bar{x}}^s$ и $s,t\in R$.
Имеем

$$\mu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\bar{\lambda};\bar{\mu};t+s\right)=\inf_m \mu\left(\sum_{n=1}^{m}\lambda_n x_n;\sum_{n=1}^{m}\mu_n x_n;t+s\right)\geq$$

$$\geq\inf_m\min\left\{\mu\left(\sum_{n=1}^{m}\lambda_n x_n;\sum_{n=1}^{m}\nu_n x_n;t\right);\ \mu\left(\sum_{n=1}^{m}\nu_n x_n;\sum_{n=1}^{m}\mu_n x_n;s\right)\right\}=$$

$$=\min\left\{\inf_m\mu\left(\sum_{n=1}^{m}\lambda_n x_n;\sum_{n=1}^{m}\nu_n x_n;t\right);\ \inf_m\mu\left(\sum_{n=1}^{m}\nu_n x_n;\sum_{n=1}^{m}\mu_n x_n;s\right)\right\}=$$

$$=\min\left\{\mu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\bar{\lambda};\bar{\nu};t\right);\mu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\bar{\nu};\bar{\mu};s\right)\right\}.$$

5) Покажем, что

$$\mu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\bar{\lambda};\bar{\mu};\,\cdot\,\right):R\to[0,1],$$

является неубывающая по t функция для $\forall\bar{\lambda},\bar{\mu}\in\mathscr{K}_{\bar{x}}^s$ и

$$\lim_{t\to\infty}\mu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\bar{\lambda};\bar{\mu};\ t\right)=1,\forall\bar{\lambda},\bar{\mu}\in\mathscr{K}_{\bar{x}}^s.$$

Так как функция $\mu(x; y; \cdot)$ является неубывающей на R, то нетрудно заметит, что функция $\mu_{\mathscr{K}^s_{\bar{x}}}\left(\bar{\lambda}; \bar{\mu}; \cdot\right)$ обладает этим свойством. Покажем, что

$$\lim_{t\to\infty} \mu_{\mathscr{K}^s_{\bar{x}}}\left(\bar{\lambda}; \bar{\mu}; t\right) = 1.$$

Возьмем $\forall\varepsilon > 0$. Пусть $S_m^{(1)} = \sum_{n=1}^m \lambda_n x_n$, $S_m^{(2)} = \sum_{n=1}^m \mu_n x_n$ и $s\text{-}\lim_{m\to\infty} S_m^{(k)} = S^{(k)} \in X^s, k = 1, 2$.
Ясно, что

$$\exists t_0 > 0 :\ \mu\left(S^{(1)}; S^{(2)}; t_0\right) \geq 1 - \varepsilon.$$

Тогда из определения s-lim следует, что

$$\exists m_0 = m_0(\varepsilon; t_0) \in N :\ \mu\left(S_m^{(k)}; S^{(k)}; t_0\right) \geq 1 - \varepsilon, \forall m \geq m_0, k = 1, 2.$$

Из свойства 4) непосредственно следует

$$\mu\left(S_m^{(1)}; S_m^{(2)}; 3t_0\right) \geq \min\left\{\mu\left(S_m^{(1)}; S^{(1)}; t_0\right)\ ;\ \mu\left(S^{(1)}; S_m^{(2)}; 2t_0\right)\right\},$$

$$\mu\left(S^{(1)}; S_m^{(2)}; 2t_0\right) \geq \min\left\{\mu\left(S^{(1)}; S^{(2)}; t_0\right)\ ;\ \mu\left(S^{(2)}; S_m^{(2)}; t_0\right)\right\}.$$

Таким образом

$$\mu\left(S_m^{(1)}; S_m^{(2)}; 3t_0\right) \geq \min\left\{\mu\left(S_m^{(1)}; S^{(1)}; t_0\right); \mu\left(S^{(1)}; S^{(2)}; t_0\right)\ ;\ \mu\left(S^{(2)}; S_m^{(2)}; t_0\right)\right\}.$$

В результате получаем

$$\mu\left(S_m^{(1)}; S_m^{(2)}; 3t_0\right) \geq 1 - \varepsilon, \forall m \geq m_0. \tag{1}$$

Так как, $\mu(x; y; \cdot)$ есть неубывающая по t функция , то из (1) получаем

$$\mu\left(S_m^{(1)}; S_m^{(2)}; 3t_0\right) \geq 1 - \varepsilon, \forall m \geq m_0, \forall t \geq 3t_0. \tag{2}$$

Имеем

$$\mu_{\mathscr{K}^s_{\bar{x}}}\left(\bar{\lambda}; \bar{\mu}; t\right) = \min\left\{\mu\left(S_k^{(1)}; S_k^{(2)}; t\right)\ ,\ k = \overline{1, m_0 - 1}\ ;\ \inf_{m\geq m_0} \mu\left(S_m^{(1)}; S_m^{(2)}; t\right)\right\}. \tag{3}$$

Так как

$$\lim_{t\to\infty} \mu\left(S_k^{(1)}; S_k^{(2)}; t\right) = 1 \ \text{ для } \forall k \in N,$$

имеем

$$\exists t_k(\varepsilon)\ ;\ \forall t \geq t_k(\varepsilon) :\ \mu\left(S_k^{(1)}; S_k^{(2)}; t\right) \geq 1 - \varepsilon, k = \overline{1, m_0 - 1}.$$

Пусть

$$t_\varepsilon^0 = \max_{1\le k\le m_0-1} t_k(\varepsilon).$$

Тогда ясно, что

$$\mu\left(S_k^{(1)}; S_k^{(2)}; t\right) \ge 1-\varepsilon, \forall t \ge t_\varepsilon^0. \tag{4}$$

Из (2) непосредственно следует

$$\inf_{m\ge m_0} \mu\left(S_m^{(1)}; S_m^{(2)}; t\right) \ge 1-\varepsilon,\ \forall t \ge 3t_0.$$

Пусть $t_\varepsilon = \max\left\{3t_0;\ t_\varepsilon^0\right\}$. Тогда из (3) и (4) получаем

$$\mu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\bar{\lambda}; \bar{\mu};\ t\right) \ge 1-\varepsilon, \forall t \ge t_\varepsilon.$$

Таким образом

$$\lim_{t\to\infty} \mu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\bar{\lambda}; \bar{\mu};\ t\right) = 1, \forall \bar{\lambda}, \bar{\mu} \in \mathscr{K}_{\bar{x}}^s.$$

6) Так как

$$\nu(x; y;\ t) = 1,\ \forall t \le 0,\ \forall x, y \in X,$$

ясно, что

$$\nu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\bar{\lambda}; \bar{\mu};\ t\right) = 1, \forall t \le 0,\ \forall \bar{\lambda}, \bar{\mu} \in \mathscr{K}_{\bar{x}}^s.$$

7) Пусть система $\{x_n\}_{n\in N}$ является невырожденной. Предположим, что

$$\nu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\bar{\lambda}; \bar{\mu};\ t\right) = 0,\ \forall t > 0.$$

Следовательно

$$\nu\left(\sum_{n=1}^m \lambda_n x_n; \sum_{n=1}^m \mu_n x_n; t\right) = 0,\ \forall t > 0\ ,\ \forall m \in N.$$

При $m = 1$ имеем

$$\nu(\lambda_1 x_1; \mu_1 x_1; t) = 0,\ \forall t > 0 \Rightarrow \lambda_1 x_1 = \mu_1 x_1 \Rightarrow \lambda_1 = \mu_1.$$

Продолжив получаем

$$\lambda_n = \mu_n,\ \forall n \in N \Rightarrow \bar{\lambda} = \bar{\mu}.$$

8) Выполнение условие

$$\nu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\bar{\lambda}; \bar{\mu};\ t\right) = \nu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\bar{\mu};\ \bar{\lambda}; t\right),$$

очевидно.

9) Пусть

$$\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu} \in \mathscr{K}^s_{\bar{x}} (\bar{\lambda} \equiv \{\lambda_n\}_{n\in N}\,, \; \bar{\mu} \equiv \{\mu_n\}_{n\in N}\,, \; \bar{\nu} \equiv \{\nu_n\}_{n\in N} \text{ и } s, t \in R.$$

Имеем

$$\nu_{\mathscr{K}^s_{\bar{x}}}\left(\bar{\lambda}; \bar{\mu}; t+s\right) = \sup_m \nu \left(\sum_{n=1}^m \lambda_n x_n; \sum_{n=1}^m \mu_n x_n; s+t \right) \leq$$

$$\leq \sup_m \max \left\{ \nu \left(\sum_{n=1}^m \lambda_n x_n; \sum_{n=1}^m \nu_n x_n; s \right); \, \nu \left(\sum_{n=1}^m \nu_n x_n; \sum_{n=1}^m \mu_n x_n; t \right) \right\} =$$

$$= \max \left\{ \sup_m \nu \left(\sum_{n=1}^m \lambda_n x_n; \sum_{n=1}^m \nu_n x_n; s \right); \, \sup_m \nu \left(\sum_{n=1}^m \nu_n x_n; \sum_{n=1}^m \mu_n x_n; t \right) \right\}$$

$$= \max \left\{ \nu_{\mathscr{K}^s_{\bar{x}}}\left(\bar{\lambda}; \bar{\nu}; s\right); \nu_{\mathscr{K}^s_{\bar{x}}}\left(\bar{\nu}; \bar{\mu}; t\right) \right\}.$$

10) Из свойства относительно $\nu\,(x; y\,; \,\cdot)$ следует, что $\nu_{\mathscr{K}^s_{\bar{x}}}\left(\bar{\lambda}; \bar{\mu}; \,\cdot\right)$ является не возрастающая на R функция. Покажем, что $\lim\limits_{t\to\infty} \nu_{\mathscr{K}^s_{\bar{x}}}\left(\bar{\lambda}; \bar{\mu}; \, t\right) = 0$, Возьмем $\forall \varepsilon > 0$. Пусть $S^{(1)}_m = \sum_{n=1}^m \lambda_n x_n$, $S^{(2)}_m = \sum_{n=1}^m \mu_n x_n$ и $s\text{-}\lim\limits_{m\to\infty} S^{(k)}_m = S^{(k)} \in X^s, k = 1, 2.$
Ясно, что

$$\exists t_0 > 0 \, : \; \nu \left(S^{(1)}; S^{(2)}; \, t_0 \right) \leq \varepsilon.$$

Тогда из определения s-lim следует, что

$$\exists m_0 = m_0\,(\varepsilon; t_0) \in N : \, \nu \left(S^{(k)}_m; S^{(k)}; \, t_0 \right) \leq \varepsilon, \forall m \geq m_0, k = 1, 2.$$

Из свойства 9) следует, что

$$\nu \left(S^{(1)}_m; S^{(2)}_m; \, 3t_0 \right) \leq \max \left\{ \nu \left(S^{(1)}_m; S^{(1)}; \, t_0 \right); \, \nu \left(S^{(1)}; S^{(2)}_m; \, 2t_0 \right) \right\},$$

$$\nu \left(S^{(1)}; S^{(2)}_m; \, 2t_0 \right) \leq \max \left\{ \nu \left(S^{(1)}; S^{(2)}; \, t_0 \right); \, \mu \left(S^{(2)}; S^{(2)}_m; \, t_0 \right) \right\}.$$

Таким образом

$$\nu \left(S^{(1)}_m; S^{(2)}_m; \, 3t_0 \right) \leq \max \left\{ \nu \left(S^{(1)}_m; S^{(1)}; \, t_0 \right); \, \nu \left(S^{(1)}; S^{(2)}; \, t_0 \right); \, \nu \left(S^{(2)}; S^{(2)}_m; \, t_0 \right) \right\}.$$

В результате получаем

$$\nu \left(S^{(1)}_m; S^{(2)}_m; \, 3t_0 \right) \leq \varepsilon, \forall m \geq m_0. \tag{5}$$

Так как, $\nu\,(x; y\,; \,\cdot)$ невозрастающая по t функция, из (5) следует

$$\nu \left(S^{(1)}_m; S^{(2)}_m; \, t \right) \leq \varepsilon, \forall m \geq m_0, \forall t \geq 3t_0. \tag{6}$$

Имеем

$$\nu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\bar{\lambda};\bar{\mu};\,t\right)=\max\left\{\nu\left(S_k^{(1)};S_k^{(2)};\,t\right)\,,\;k=\overline{1,m_0-1}\,;\;\sup_{m\geq m_0}\nu\left(S_m^{(1)};S_m^{(2)};\,t\right)\right\}. \quad (7)$$

Так как

$$\lim_{t\to\infty}\nu\left(S_k^{(1)};S_k^{(2)};\,t\right)=0\;\;\text{для }\forall k\in N,$$

имеем

$$\exists t_k\left(\varepsilon\right)\,;\,\forall t\geq t_k\left(\varepsilon\right):\;\nu\left(S_k^{(1)};S_k^{(2)};\,t\right)\leq\varepsilon,k=\overline{1,m_0-1}.$$

Пусть

$$t_\varepsilon^0=\max_{1\leq k\leq\,m_0-1}t_k\left(\varepsilon\right).$$

Тогда ясно, что

$$\nu\left(S_k^{(1)};S_k^{(2)};\,t\right)\leq\varepsilon,\forall t\geq t_\varepsilon^0. \quad (8)$$

Из (6) следует

$$\sup_{m\geq m_0}\nu\left(S_m^{(1)};S_m^{(2)};\,t\right)\leq\varepsilon,\;\forall t\geq 3t_0.$$

Пусть

$$t_\varepsilon=\max\left\{3t_0;\,t_\varepsilon^0\right\}.$$

Отсюда из (7) и (8) получаем

$$\nu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\bar{\lambda};\bar{\mu};\,t\right)\leq\varepsilon,\forall t\geq t_\varepsilon.$$

Таким образом

$$\lim_{t\to\infty}\nu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\bar{\lambda};\bar{\mu};\,t\right)=0,\forall\bar{\lambda},\bar{\mu}\in\mathscr{K}_{\bar{x}}^s.$$

11)

$$\mu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\bar{\lambda};\bar{\mu};t\right)+\nu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\bar{\lambda};\bar{\mu};t\right)=\inf_m\mu\left(\sum_{n=1}^m\lambda_nx_n;\sum_{n=1}^m\mu_nx_n;t\right)+$$

$$+\sup_m\nu\left(\sum_{n=1}^m\lambda_nx_n;\sum_{n=1}^m\mu_nx_n;t\right)\leq$$

$$\leq\sup_m\left[\mu\left(\sum_{n=1}^m\lambda_nx_n;\sum_{n=1}^m\mu_nx_n;t\right)+\nu\left(\sum_{n=1}^m\lambda_nx_n;\sum_{n=1}^m\mu_nx_n;t\right)\right]\leq 1,\forall\bar{\lambda},\bar{\mu}\in\mathscr{K}_{\bar{x}}^s,\forall t\in R.$$

Таким образом, мы доказали справедливость следующей

Теорема 3.1. *Пусть $(X;\mu;\nu)$ есть сильно fuzzy пространство и пусть $\{x_n\}_{n\in N}\subset X$ невырожденная система. Тогда пространство коэффициентов $\left(\mathscr{K}^s_{\bar{x}};\mu_{\mathscr{K}^s_{\bar{x}}};\nu_{\mathscr{K}^s_{\bar{x}}}\right)$ тоже является сильно fuzzy метрическим пространством.*

4. Полнота пространства коэффициентов

В дальнейшем мы предположим, что это $(X;\mu;\nu)$ является полным *IFMS*. Покажем, что $\left(\mathscr{K}^s_{\bar{x}};\mu_{\mathscr{K}^s_{\bar{x}}};\nu_{\mathscr{K}^s_{\bar{x}}}\right)$ является сильно fuzzy полным метрическим пространством. Далее нам понадобится следующее условие.

α) Пусть линейные операции strongly непрерывны в *IFMS* X*, т.е. если*

$$s-\lim_{n\to\infty}x_n=x, s-\lim_{n\to\infty}y_n=y, \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda, (\{x_n;y_n\}_{n\in N}\subset X, \{\lambda_n\}_{n\in N}\subset C),$$

то

$$s-\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=x+y, s-\lim_{n\to\infty}(\lambda_n x_n)=\lambda x.$$

Сначала мы докажем следующее

Лемма 4.1. *Пусть $x_0\neq 0$, $x_0\in X$, и пусть $\{\lambda_n\}_{n\in N}\subset R$ некоторая последовательность. Если $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda_n x_0)=0$, т.е.*

$$\forall\varepsilon>0, \exists n_0=n_0(\varepsilon): \mu(\lambda_n x_0;0;\, t)>1-\varepsilon, \nu(\lambda_n x_0;0;\, t)<\varepsilon, \forall t\in R_+, \forall n\geq n_0;$$

тогда $\lambda_n\to 0$, $n\to\infty$.

В действительности, пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$ не имеет место. Предположим, что $\{\lambda_n\}_{n\in N}$ имеет ограниченную подпоследовательность $\{\lambda_{n_k}\}_{k\in N}$. Тогда

$$\exists\lambda_0\in C:\ \lambda_{n_k}\to\lambda_0,\ \ k\to\infty.$$

Имеем

$$\lambda_{n_k}x_0\xrightarrow{s}\lambda_0 x_0,\ \ k\to\infty,$$

и следовательно $\lambda_0=0$, так как *s-сходящаяся* последовательность имеет единственный предел. Пусть $\{\lambda_n\}_{n\in N}$ имеет неограниченную подпоследовательность

$$\{\lambda_{n_k}\}_{k\in N}:\ \lambda_{n_k}\to\infty,\ \ k\to\infty.$$

Следовательно

$$\lambda_{n_k}^{-1}\to 0,\ \ k\to\infty.$$

Имеем

$$\lambda_{n_k}^{-1}\cdot\lambda_{n_k}x=x\neq 0, \forall k\in N.$$

С другой стороны

$$\lim_{k\to\infty}\left(\lambda_{n_k}^{-1}\lambda_{n_k}x\right)=\lim_{k\to\infty}\lambda_{n_k}^{-1}\lim_{k\to\infty}(\lambda_{n_k}x)=0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Возьмем *s-фундаментальную* последовательность $\left\{\bar{\lambda}_n\right\}_{n\in N} \subset \mathcal{K}^s_{\bar{x}}$, $\lambda_n \equiv \left\{\lambda_k^{(n)}\right\}_{k\in N}$. Тогда

$\lim\limits_{n,m\to\infty} \mu_{\mathcal{K}^s_{\bar{x}}}\left(\bar{\lambda}_n; \bar{\lambda}_m\,;\,t\right) = 1$ и $\lim\limits_{n,m\to\infty} \nu_{\mathcal{K}^s_{\bar{x}}}\left(\bar{\lambda}_n; \bar{\lambda}_m\,;\,t\right) = 0$, равномерно по $t \in R$, т.е.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n,m\to\infty} \inf\limits_{r} \mu\left(\sum_{k=1}^r \lambda_k^{(n)} x_k; \sum_{k=1}^r \lambda_k^{(m)} x_k\,;t\right) = 1\,, \\ \lim\limits_{n,m\to\infty} \sup\limits_{r} \nu\left(\sum_{k=1}^r \lambda_k^{(n)} x_k; \sum_{k=1}^r \lambda_k^{(m)} x_k\,;t\right) = 0\,, \end{array}\right\} \tag{9}$$

равномерно по $t \in R$. Далее будем предполагать, что функции μ и ν инвариантны относительно сдвига, т.е. имеет место условие:

12)

$$\mu\left(x;y;t\right) = \mu\left(x-z;y-z;t\right)\,,\ \ \nu\left(x;y;t\right) = \nu\left(x-z;y-z;t\right)\,,\ \forall x,y,z \in X,\, \forall t \in R.$$

Принимая во внимание 3) и 8) , отсюда непосредственно получаем

$$\mu\left(x;0;t\right) = \mu\left(-x;0;t\right)\,,\ \ \nu\left(x;0;t\right) = \nu\left(-x;0;t\right)\,,\ \forall x \in X,\, \forall t \in R.$$

Совершенно очевидно, что этими же свойствами обладают и функции $\mu_{\mathcal{K}^s_{\bar{x}}}$ и $\nu_{\mathcal{K}^s_{\bar{x}}}$. Таким образом

$$\mu\left(x;y;t\right) = \mu\left(-x;-y;t\right)\,,\ \ \nu\left(x;y;t\right) = \nu\left(-x;-y;t\right)\,,\ \forall x,y \in X,\, \forall t \in R. \tag{10}$$

Имеем

$$\mu\left(\lambda_1^{(n)} x_1; \lambda_1^{(m)} x_1;\, t\right) \to 1\ ,\ \nu\left(\lambda_1^{(n)} x_1; \lambda_1^{(m)} x_1;\, t\right) \to 0\ ,\ \ n,m \to \infty,$$

равномерно по $t \in R$. Это непосредственно следует из соотношения (9). Рассмотрим

$$\mu\left(\lambda_2^{(n)} x_2; \lambda_2^{(m)} x_2;\, t\right) \geq \min\left\{\mu\left(\lambda_2^{(n)} x_2; \lambda_2^{(m)} x_2 + \lambda_1^{(m)} x_1 - \lambda_1^{(n)} x_1;\, t\right)\,;\right.$$
$$\left.\mu\left(\lambda_2^{(m)} x_2 + \lambda_1^{(m)} x_1 - \lambda_1^{(n)} x_1; \lambda_2^{(m)} x_2;\, t\right)\right\} = \min\left\{\mu\left(\lambda_1^{(n)} x_1 + \lambda_2^{(n)} x_{2_0}; \lambda_1^{(m)} x_1 + \lambda_2^{(m)} x_2;\, t\right)\,;\right.$$
$$\left.\mu\left(-\lambda_1^{(n)} x_1; -\lambda_1^{(m)} x_1;\, t\right)\right\}.$$

Обратив внимание к соотношениям (9) и (10), отсюда получаем, что

$$\mu\left(\lambda_2^{(n)} x_2; \lambda_2^{(m)} x_2;\, t\right) \to 1\ ,\ \ n,m \to \infty,$$

равномерно по $t \in R$. Аналогичным образом получаем, что

$$\nu\left(\lambda_2^{(n)} x_2; \lambda_2^{(m)} x_2;\, t\right) \to 0\ ,\ n,m \to \infty,$$

равномерно по $t \in R$. Продолжив это рассуждение получаем

$$\mu\left(\lambda_k^{(n)}x_k;\lambda_k^{(m)}x_k;\,t\right)\to 1\ ,\ \nu\left(\lambda_k^{(n)}x_k;\lambda_k^{(m)}x_{k_0};\,t\right)\to 0\ ,\ n,m\to\infty,$$

равномерно по $t\in R$, для каждого фиксированного $k\in N$, т.е.

$$s-\lim_{n,m\to\infty}\left(\lambda_k^{(n)}-\lambda_k^{(m)}\right)x_k=0\ ,\ \ \forall k\in N.$$

По Лемме 4.1 отсюда следует, что последовательность $\left\{\lambda_k^{(n)}\right\}_{n\in N}$ фундаментальна для $\forall k\in N$, и пусть $\lambda_k^{(n)}\to\lambda_k,\ n\to\infty$. Положим $\bar\lambda\equiv\langle\lambda_k\rangle_{k\in N}$ и покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_{\mathscr{K}_{\bar x}^s}\left(\bar\lambda_n;\bar\lambda\,;\,t\right)=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\nu_{\mathscr{K}_{\bar x}^s}\left(\bar\lambda_n;\bar\lambda\,;\,t\right)=0$,
равномерно по $t\in R$. Установим это относительно $\mu_{\mathscr{K}_{\bar x}^s}$. Возьмем $\forall\varepsilon>0$. Ясно, что $\exists n_0$, $\forall n\ge n_0$, $\forall p\in N$:

$$\mu_{\mathscr{K}_{\bar x}^s}\left(\bar\lambda_n;\bar\lambda_{n+p};\,t\right)>1-\varepsilon,\forall t\in R.$$

Следовательно

$$\inf_r\mu\left(\sum_{k=1}^r\lambda_k^{(n)}x_k;\sum_{k=1}^r\lambda_k^{(n+p)}x_k;\,t\right)>1-\varepsilon,\forall n\ge n_0\,,\,\forall p\in N,\forall t\in R_+.\qquad(11)$$

Для дальнейших рассуждений нам потребуется следующее условие:

13) *из* $\lambda_n\to\lambda\,,\ n\to\infty$ *следует, что* $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda_nx)=\lambda x$, *т.е.*

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\lambda_nx;\lambda x;t\right)=1,\lim_{n\to\infty}\nu\left(\lambda_nx;\lambda x;t\right)=0,$$

равномерно по $t\in R$, $\forall x\in X$.

Отсюда непосредственно следует, что если

$$\lambda_n^{(k)}\to\lambda^{(k)}\,,\ \ n\to\infty\,,\ \forall k=\overline{1,r},$$

тогда

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\sum_{k=1}^r\lambda_n^{(k)}x_k;y;t\right)=\mu\left(\sum_{k=1}^r\lambda^{(k)}x_k;y;t\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\nu\left(\sum_{k=1}^r\lambda_n^{(k)}x_k;y;t\right)=\nu\left(\sum_{k=1}^r\lambda^{(k)}x_k;y;t\right),\forall\left\{x_1;...;x_r;y\right\}\subset X,\forall t\in R.$$

На самом деле, не ограничивая общности будем рассматривать случай $r=2$. Достаточно доказательство провести относительно ν. Так как, эта схема применима к $\tilde\mu=1-\mu$. Пусть

$$\lambda_n\to\lambda,\quad\mu_n\to\mu,\ n\to\infty\,.$$

По определению

$$\nu\left(x;y;t\right) \leq \max\left\{\nu\left(x;z;t\right);\nu\left(y;z;t\right)\right\} \leq \nu\left(x;z;t\right) +$$

$$\nu\left(y;z;t\right)\ ,\ \forall x,y,z \in X\ ,\ \forall t \in R.$$

Отсюда следует

$$\nu\left(x;y;t\right) - \nu\left(x;z;t\right) \leq \nu\left(y;z;t\right).$$

Аналогичным образом получаем

$$\nu\left(x;z;t\right) - \nu\left(x;y;t\right) \leq \nu\left(y;z;t\right).$$

Таким образом

$$\left|\nu\left(x;y;t\right) - \nu\left(x;z;t\right)\right| \leq \nu\left(y;z;t\right). \tag{12}$$

Взяв здесь $y = \lambda_n a\ ,\ z = \lambda a$, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \nu\left(x;\lambda_n a;t\right) = \nu\left(x;\lambda a;t\right),$$

равномерно по $t \in R$ и для $\forall x, a \in X$. С другой стороны имеем

$$\nu\left(\lambda_n x + \mu_n y;\lambda x + \mu y;t\right) \leq \nu\left(\lambda_n x + \mu_n y;\mu_n y + \lambda x;t\right) + \nu\left(\mu_n y + \lambda x;\lambda x + \mu y;t\right).$$

Принимая во внимание свойство 12) отсюда получаем

$$\nu\left(\lambda_n x + \mu_n y;\lambda x + \mu y;t\right) \leq \nu\left(\lambda_n x;\lambda x;t\right) + \nu\left(\mu_n y;\mu y;t\right).$$

Следовательно

$$s - \lim_{n\to\infty}\left(\lambda_n x + \mu_n y\right) = \lambda x + \mu y, \forall x, y \in X.$$

Отсюда непосредственно следует, что если

$$\lambda_n^{(k)} \to \lambda^{(k)}\ ,\ \ n \to \infty\ ,\ \forall k = \overline{1,r},$$

то

$$s - \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{r}\lambda_n^{(k)}x_k\right) = \sum_{k=1}^{r}\lambda^{(k)}x_k\ ,\ \forall\left\{x_k\right\}_1^r \subset X.$$

Если в (12) положить

$$y = \sum_{k=1}^{r}\lambda_n^{(k)}x_k \text{ и } z = \sum_{k=1}^{r}\lambda^{(k)}x_k,$$

то получаем

$$\lim_{n\to\infty}\nu\left(x;\sum_{k=1}^{r}\lambda_n^{(k)}x_k;t\right)=\nu\left(x;\sum_{k=1}^{r}\lambda^{(k)}x_k\,;t\right),$$

равномерно по $t\in R$ и $\forall\{x;x_1;...;x_r\}\subset X$. Аналогичные результаты верны и относительно по μ. Тогда переходя к пределу при $p\to\infty$ в (11) получаем

$$\inf_r\mu\left(\sum_{k=1}^{r}\lambda_k^{(n)}x_k;\sum_{k=1}^{r}\lambda_k x_k;\,t\right)\geq 1-\varepsilon,\forall n\geq n_0\,,\,\forall t\in R_+. \tag{13}$$

Аналогичным образом получаем, что $\exists m_0\in N$:

$$\sup_r\nu\left(\sum_{k=1}^{r}\lambda_k^{(n)}x_k;\sum_{k=1}^{r}\lambda_k x_k;\,t\right)\leq\varepsilon,\forall n\geq m_0\,,\,\forall t\in R_+. \tag{14}$$

Имеем

$$\mu\left(\sum_{k=r}^{r+p}\lambda_k^{(n)}x_k;\sum_{k=r}^{r+p}\lambda_k x_k;\,t\right)=\mu\left(\sum_{k=r}^{r+p}\left(\lambda_k^{(n)}-\lambda_k\right)x_k;0;t\right)\geq$$

$$\geq\min\left\{\mu\left(\sum_{k=r}^{r+p}\left(\lambda_k^{(n)}-\lambda_k\right)x_k;-\sum_{k=1}^{r-1}\left(\lambda_k^{(n)}-\lambda_k\right)x_k;\frac{t}{2}\right);\,\mu\left(-\sum_{k=1}^{r-1}\left(\lambda_k^{(n)}-\lambda_k\right)x_k;0;\frac{t}{2}\right)\right\}=$$

$$=\min\left\{\mu\left(\sum_{k=1}^{r+p}\left(\lambda_k^{(n)}-\lambda_k\right)x_k;0;\frac{t}{2}\right);\,\mu\left(\sum_{k=1}^{r-1}\left(\lambda_k^{(n)}-\lambda_k\right)x_k;0;\frac{t}{2}\right)\right\}.$$

Обратив внимание к (13) получаем

$$\mu\left(\sum_{k=r}^{r+p}\lambda_k^{(n)}x_k;\sum_{k=r}^{r+p}\lambda_k x_k;\,t\right)\geq 1-\varepsilon,\forall n\geq n_0\,,\ \forall r,p\in N,\forall t\in R_+. \tag{15}$$

Из $\bar{\lambda}_n\in\mathscr{K}_{\bar{x}}^s$ следует, что $\exists m_0^{(n)}$:

$$\mu\left(\sum_{k=m}^{m+p}\lambda_k^{(n)}x_k;0;t\right)>1-\varepsilon,\forall m\geq m_0^{(n)},\ \forall p\in N,\forall t\in R_+. \tag{16}$$

Имеем

$$\mu\left(\sum_{k=m}^{m+p}\lambda_k x_k;0;t\right)\geq\min\left\{\mu\left(\sum_{k=m}^{m+p}\lambda_k x_k;\sum_{k=m}^{m+p}\lambda_k^{(n)}x_k;t\right);\,\mu\left(\sum_{k=m}^{m+p}\lambda_k^{(n)}x_k;0;t\right)\right\}.$$

Отсюда учитывая соотношения (15) и (16) получаем

$$\mu\left(\sum_{k=m}^{m+p}\lambda_k x_k;0;t\right)\geq 1-\varepsilon,\forall m\geq m_0^{(n)},\ \forall p\in N,\forall t\in R_+.$$

Аналогичным образом устанавливаем, что

$$\exists m_1\in N:\nu\left(\sum_{k=m}^{m+p}\lambda_k x_k;0;t\right)\leq\varepsilon,\forall m\geq m_1,\ \forall p\in N,\forall t\in R_+.$$

Отсюда следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k$ сильно fuzzy сходится в X, т.е. если X сильно полно, тогда $\exists\, s\text{-}\lim\limits_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\lambda_k x_k$. Следовательно, $\bar\lambda\in\mathscr{K}_{\bar x}^s$, и из (13), (14) непосредственно следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\mu_{\mathscr{K}_{\bar x}^s}\left(\bar\lambda_n;\bar\lambda;t\right)=1,\lim_{n\to\infty}\nu_{\mathscr{K}_{\bar x}^s}\left(\bar\lambda_n;\bar\lambda;t\right)=0,$$

равномерно по $\forall t\in R$. В результате получаем, что пространство $\left(\mathscr{K}_{\bar x}^s;\mu_{\mathscr{K}_{\bar x}^s};\nu_{\mathscr{K}_{\bar x}^s}\right)$ является сильно fuzzy полным. Таким образом, справедлива

Теорема 4.1. *Пусть $(X;\mu;\nu)$ есть fuzzy полное метрическое пространство, относительно которых имеют место условия α), β), 12) и 13). Если $\{x_n\}_{n\in N}\subset X$ невырожденная система, тогда пространство коэффициентов $\left(\mathscr{K}_{\bar x}^s;\mu_{\mathscr{K}_{\bar x}^s};\nu_{\mathscr{K}_{\bar x}^s}\right)$ тоже является сильно fuzzy полным метрическим пространством.*

Рассмотрим оператор $T:\mathscr{K}_{\bar x}^s\to X$ определенный выражением

$$T\bar\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n,\bar\lambda\equiv\{\lambda_n\}_{n\in N}\in\mathscr{K}_{\bar x}^s.$$

Пусть $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\bar\lambda_n=\bar\lambda$ в $\mathscr{K}_{\bar x}^s$, где $\bar\lambda_n\equiv\left\{\lambda_k^{(n)}\right\}_{k\in N}\in\mathscr{K}_{\bar x}^s$. Имеем

$$\mu\left(T\bar\lambda_n;T\bar\lambda\,;\,t\right)=\mu\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^{(n)}-\lambda_k\right)x_k\,;\,0;t\right)\geq$$

$$\inf_m\mu\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\lambda_k^{(n)}-\lambda_k\right)x_k\,;0;\,t\right)=\mu_{\mathscr{K}_{\bar x}^s}\left(\bar\lambda_n;\bar\lambda\,;\,t\right).$$

Отсюда непосредственно следует, что $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}T\,\bar\lambda_n=T\bar\lambda$, т.е. оператор T является сильно fuzzy непрерывным. Пусть $\bar\lambda\in KerT$, т.е.

$$T\bar\lambda=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n=0,$$

где $\bar\lambda\equiv\{\lambda_n\}_{n\in N}\in\mathscr{K}_{\bar x}^s$. Ясно, что если система $\{x_n\}_{n\in N}$ является *s-линейно независимой*, то $\lambda_n=0$, $\forall n\in N$, и в результате, $KerT=\{0\}$. В этом случае

$$\exists T^{-1} : X \supset ImT \to \mathscr{K}_{\bar{x}}^s.$$

Если при этом ImT является s- *замкнутым* в X, то T^{-1} тоже непрерывен.

Обозначим через $\{\bar{e}_n\}_{n\in N} \subset \mathscr{K}_{\bar{x}}^s$ каноническую систему в $\mathscr{K}_{\bar{x}}^s$, где $\bar{e}_n = \{\delta_{nk}\}_{k\in N} \in \mathscr{K}_{\bar{x}}^s$. Ясно, что $T\bar{e}_n = x_n, \forall n \in N$. Покажем, что $\{\bar{e}_n\}_{n\in N}$ образует s-*базис* в $\mathscr{K}_{\bar{x}}^s$. Возьмем $\forall \bar{\lambda} \equiv \{\lambda_n\}_{n\in N} \in \mathscr{K}_{\bar{x}}^s$ и покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \bar{e}_n$ сильно fuzzy сходится в $\mathscr{K}_{\bar{x}}^s$. На самом деле, из существования s-$\lim\limits_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n x_n$ в X_s следует, что для $\forall \varepsilon > 0$, $\exists m_0 \in N$:

$$\mu\left(\sum_{n=m}^{m+p} \lambda_n x_n; 0; t\right) > 1-\varepsilon, \forall m \ge m_0\,, \forall p \in N, \forall t \in R_+.$$

Имеем

$$\mu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\sum_{n=m}^{m+p} \lambda_n \bar{e}_n; 0; t\right) = \inf_r \left(\sum_{n=m}^{r} \lambda_n x_n; 0; t\right) \ge 1-\varepsilon, \forall m \ge m_0\,, \forall p \in N, \forall t \in R_+.$$

Отсюда следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \bar{e}_n$ сильно fuzzy сходится в $\mathscr{K}_{\bar{x}}^s$. Более того

$$\mu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\bar{\lambda} - \sum_{n=1}^{m} \lambda_n \bar{e}_n; 0; t\right) = \mu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\left(\{\ ...; 0;\ \lambda_{m+1}; ...\}\ ; 0;\ t\right) =$$

$$= \inf_r \mu\left(\sum_{n=m+1}^{r} \lambda_n x_n; 0; t\right) \ge 1-\varepsilon, \forall m \ge m_0\,, \forall t \in R_+.$$

Следовательно

$$s - \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n \bar{e}_n = \bar{\lambda},\ \text{т.е. } \bar{\lambda} \stackrel{s}{=} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n \bar{e}_n.$$

Рассмотрим функционалы $e_n^*\left(\bar{\lambda}\right) = \lambda_n$, $\forall n \in N$. Покажем, что они являются s-*непрерывными*. Пусть s-$\lim\limits_{n\to\infty} \bar{\lambda}_n = \bar{\lambda}$, где $\bar{\lambda}_n \equiv \left\{\lambda_k^{(n)}\right\}_{k\in N} \in \mathscr{K}_{\bar{x}}^s$. Как уже установлено при доказательстве Теоремы 4.1, имеет место $\lambda_k^{(n)} \to \lambda_k$ при $n \to \infty$, т.е. $e_k^*\left(\bar{\lambda}_n\right) \to e_k^*\left(\bar{\lambda}\right)$ при $n \to \infty$ для $\forall k \in N$. Таким образом, e_k^* является s-*непрерывным* на $\mathscr{K}_{\bar{x}}^s$ при $\forall k \in N$. С другой стороны, легко заметить, что $e_n^*\left(\bar{e}_k\right) = \delta_{nk}$, $\forall n, k \in N$, т.е. $\{e_n^*\}_{n\in N}$ является s-*биортогональной* к $\{\bar{e}_n\}_{n\in N}$. В результате получаем, что система $\{\bar{e}_n\}_{n\in N}$ образует s-*базис* в $\mathscr{K}_{\bar{x}}^s$. Итак, справедлива

Теорема 4.2. *Пусть $(X;\mu;\nu)$ является сильно fuzzy полным метрическим пространством, которое удовлетворяет условиям $\alpha)$, $\beta)$, 12) и 13). Пусть $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ невырожденная система. Тогда соответствующее пространство коэффициентов $\left(\mathscr{K}_{\bar{x}}^s; \mu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}; \nu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\right)$ является сильно fuzzy полным метрическим пространством с каноническим s-базисом $\{\bar{e}_n\}_{n\in N}$.*

Предположим, что система $\{x_n\}_{n\in N}$ *s-линейно независима* и ImT замкнуто. Тогда легко заметить, что $\{x_n\}_{n\in N}$ образует *s-базис* в ImT, и в случае *s-полноты* ее в X_s, она образует *s-базис* в нем. В этом случае $\mathscr{K}_{\bar{x}}^s$ и X_s изоморфны и T является изоморфизмом между ними. Обратное тоже верно, т.е. если выше определенный оператор T есть изоморфизм между $\mathscr{K}_{\bar{x}}^s$ и X_s, то система $\{x_n\}_{n\in N}$ образует *s-базис* в X_s. T назовем коэффициентным оператором. Таким образом, имеет место

Теорема 4.3. *Пусть $(X;\mu;\nu)$ есть сильно fuzzy полное метрическое пространство, которое удовлетворяет условиям $\alpha)$, $\beta)$, 12) and 13). Пусть $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ невырожденная система, $\left(\mathscr{K}_{\bar{x}}^s;\mu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s};\nu_{\mathscr{K}_{\bar{x}}^s}\right)$ соответствующее сильно fuzzy полное метрическое пространство и $T{:}\mathscr{K}_{\bar{x}}^s \to X_s$ коэффициентный оператор. Система $\{x_n\}_{n\in N}$ образует s-базис в X_s только тогда, когда оператор T является изоморфизмом между $\mathscr{K}_{\bar{x}}^s$ и X_s.*

Список литературы

[1] Bag T., Samanta S.K. *Fuzzy bounded linear operators*, Fuzzy Sets and Systems, **151**, 2005, 513–547.

[2] Bilalov B.T., Farahani S.M., Guliyeva F.A. *The Intuitionistic Fuzzy Normed Space of Coefficients* Abstract and Applied Analysis, **2012**, 2012, 11 pages

[3] Debnath P., Sen M. *A Remark on the Separability and Approximation Property in Intuitionistic Fuzzy n-normed Linear Spaces*, International Mathematical Forum, **6(39)**, 2011, 1933–1940.

[4] Deng Z.K. *Fuzzy pseudo metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., **86(1)**, 1982, 74-95.

[5] Kramosil I., Michelek J. *Fuzzy metric and statistical metric spaces*, Kybernetica, **11**, 326-334.

[6] Mursaleen M., Karakaya V., Mohiuddine S.A. *Schauder Basis, Separability, and Approximation Property in Intuitionistic Fuzzy Normed Space*, Abstract and Applied Analysis, 2010, 14 pages.

[7] Saadati R., Vaezpour S.M. *Some results on fuzzy Banach spaces*, J. Appl. Math. Comput., **17**, 2005, 475–484.

[8] Schweizer B., Sklar A. *Statistical metric spaces*, Pacific J. Math., **10**, 1960, 313–334.

[9] Tanaka Y., Mizuno Y., Kado T. *Chaotic dynamics in the Friedman equation*, Chaos, Solitons & Fractals, **24**, 2005, 407–422.

[10] Yilmaz Y. *Schauder bases and approximation property in fuzzy normed spaces*, Computers & Mathematics with Applications, **59(6)**, 2010, 1957–1964.

[11] Heil Ch. *A Basis Theory Primer*, Springer, 2011, 534 p.

[12] Bilalov B.T., Veliyev S.G. *Some problems of bases*, Baku, Elm, 2010, 304 p.

[13] Anastasiou G.A. *Fuzzy mathematics: Approximation theory*, Springer, 2010, 443 p.

[14] Atanassov K. *Intuitionistic fuzzy sets*, In: Sgurev V., editor. VII ITKRЎs Session, Sofia, June, 1983.

[15] Debnath P., Sen M. *A Remark on the Separability and Approximation Property in Intuitionistic Fuzzy n-normed Linear Spaces*, International Mathematical Forum, **6(39)**, 2011, 1933-1940.

[16] Deng Z.K. *Fuzzy pseudo metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., **86(1)**, 1982, 74-95.

[17] El Naschie M.S. *On the uncertainty of Cantorian geometry and the two slit experiment*, Chaos, Solitons and Fractals, **9(3)**, 1998, 517–529.

[18] El Naschie M.S. *A review of E-infinity theory and the mass spectrum of high energy particle physics*, Chaos, Solitons & Fractals, **19(1)**, 2004, 209–236.

[19] Erceg M.A. *Metric spaces in fuzzy set theory*, J. Math. Anal. Appl., **69**, 1979, 205–230.

[20] George A., Veeramani P. *On some results of analysis for fuzzy metric spaces*, Fuzzy Sets & Systems, **90**, 1977, 365–368.

[21] Lowen R. *Fuzzy Set Theory*, : Basic Concepts, Techniques and Bibliography, Kluwer Academic Publishers, 1996, 408 p.

[22] Saadati R., Park J.H. *On the intuitionistic fuzzy topological spaces*, Chaos, Solitons & Fractals, **27(2)**, 2006, 331-344.

Фатима А.Гулиева
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана, Б.Вахабзаде 9, AZ1141
Email: quliyeva-fatima@mail.ru

Received 15 May 2017
Accepted 2 June 2017