Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 7, No 1, 2017, June
ISSN 2222-5498

Исследование Спектра Линейного Интегродифференциального Оператора Четвчртого Порядка на Всей Оси

М.С. Алмамедов

Аннотация. В работе изучается спектр линейного интегро-дифференциального оператора четвертого порядка на всей оси, при некоторых дополнительных условиях коэффициента $p(x)$ и ядра $k[x, s, \rho]$

Key Words and Phrases: интегро-дифференциал, ядра, асиптотические.
2010 Mathematics Subject Classifications: 34K08

Рассмотрим в $L^2(-\infty, \infty)$ интегродифференциальный оператор (и.д.о) L, порожденный интегродифференциальным выражением

$$Ly \equiv y^{(4)} + p\left(x\right)\, y + \int_{-\infty}^{+\infty} K\left(x, s, \rho\right)\ y^{(4)}\left(s, \rho\right)\ ds\ , \tag{1}$$

где $\lambda = \rho^4$, $\rho = \rho_1 + i\rho_2$, $|\rho| < \frac{\varepsilon_0}{4}$, $\varepsilon_0 > 0$.

Пусть $p\left(x\right)$ комплекснозначная суммируемая функция в интервале $R = (-\infty, \infty)$, удовлетворяющая условие

$$|p\left(x\right)| < c\, e^{-\varepsilon_0 |x|}, \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |p\left(x\right)|\ |p\left(s\right)| \cdot e^{\varepsilon_0(|x|+|s|)} dx\, ds = B_1 < \infty, \tag{2}$$

А ядро и.д.о. (1) при фиксированных x, s $(-\infty < x, s < \infty)$ является целой аналитической функций по ρ в области $|\rho| < \frac{\varepsilon_0}{4}$, имеет в R достаточное количество непрерывных производных относительно x которые $\frac{\partial^i k(x,s,\rho)}{\partial x^i} \in L^2\left(R\right)$, $\left(i = \overline{0, 4}\right)$ и имеет вид:

$$K\left(x, s, \rho\right) = \begin{cases} \left[\frac{e^{i\rho(x-s)} - e^{-i\rho(x-s)}}{4i\rho^7} - \frac{e^{\rho(x-s)} - e^{-\rho(x-s)}}{4\rho^7}\right] P\left(s\right) \ , & \text{при } s < x \\ \left[\frac{e^{i\rho(s-x)} - e^{-i\rho(s-x)}}{4i\rho^7} - \frac{e^{\rho(s-)} - e^{-\rho(s-x)}}{4\rho^7}\right] P\left(s\right) \ , & \text{при } s > x \end{cases} \tag{3}$$

Наша задача изучить спектр и.д.о. L.

Получены асимптотические формуле для решений и. д. уравнений на всей оси при выполнении условий (2), (3).

Полученные формулы аналогичны формулам для дифференциальных уравнений четвчртого порядка (см. [2]) на всей оси. Однако нам пришлось применить здесь другой метод их вывода.

Спектр оператора L состоит из непрерывного спектра заполняющего ось $\lambda > 0$, и конечного числа комплексных значений.

Однако, в отличие от и.д.о. второго порядка (см. [3]) оператор L может иметь положительные собственные значения. Найдена условия, при выполнении которых и.д.о. L не имеет собственных значений, и радиус круга, зависящий от $P(x)$, вне которого нет собственных значений.

1. Асимптотическая формула для решений и.д. уравнения $Ly = \lambda y$

Рассмотрим и.д. уравнения

$$-y^{(4)} + \rho^4 y = [P(x) + A_\lambda]\ y, \tag{4}$$

где $A_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, s, \rho)\ y^{(4)}(s, \rho)\ ds$.
Имеет место следующие утверждение:

Лемма 4.1. Пусть выполняются условия (2), (3) и $4\ |\rho| < \varepsilon_0$. Тогда и.д. уравнение (4) имеет четыре линейно-независимых решения $y_k(x, \rho)$, $k = 1, 2, 3, 4$, аналитических по ρ в $4\ |\rho| < \varepsilon_0$ при каждом фиксированном $x \in (-\infty, \infty)$ и допускающих асимптотику

$$y_k(x, \rho) = e^{(i)^k}\rho\, x\ \left[1 + 0\left(e^{-2\varepsilon_0 x}\right)\right]\ \text{?@8}\ \ x \to +\infty\ \ ,\ \ \ k = 1, 2, 3, 4 \tag{5}$$

Вместо (4) рассмотрим ему эквивалентное и.д. уравнение, которое получим методом вариации произвольных постоянных. Получим:

$$y(x, \rho) = c_1 e^{i\rho x} + c_2 e^{-i\rho x} + c_3 e^{\rho x} + c_4 e^{-\rho x} +$$

$$+ \int_x^\infty \left[\frac{e^{i\rho(x-t)} - e^{-i\rho(x-t)}}{4i\rho^3} - \frac{e^{\rho(x-t)} - e^{-\rho(x-t)}}{4\rho^3}\right]\ \left[p\,[t]\ y(t, \rho) + \int_{-\infty}^{+\infty} k(t, s, \rho)\, \frac{d^4 y(s, p)}{ds^4}\right]\ dt \tag{6}$$

Интегрируя по частям из (6) получим:

$$y(x, \rho) = c_1 e^{i\rho x} + c_2 e^{-i\rho x} + c_3 e^{\rho x} + c_4 e^{-\rho x} +$$

$$+ \int_x^\infty H(x, t, \rho)\ [p(t)\ y(t, \rho) + \sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+1}\, \frac{\partial^{i-1} k(t, s, \rho)}{\partial t^{i-1}} p(s)\, y^{(4-i)}(s, \rho)\Big|_{-\infty}^{+\infty} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^4 k(t, s, \rho)}{\partial t^4}\, p(s)\ y(s, p)\ ds\Big]\ dt, \tag{7}$$

где $H(x, t, \rho) = \frac{e^{i\rho(x-t)} - e^{-i\rho(x-t)}}{4i\rho^3} - \frac{e^{\rho(x-t)} - e^{-\rho(x-t)}}{4\rho^3}$.

Из условия (3) легко можно доказать, что

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (s < x)}} \sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+1} \frac{\partial^{i-1} k(x,s,\rho)}{\partial x^{i-1}} p(s)\, y^{(4-i)}(s,\rho) -$$

$$- \lim_{\substack{x \to -\infty \\ (s > x)}} \sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+1} \frac{\partial^{i-1} k(x,s,\rho)}{\partial x^{i-1}} p(s)\, y^{(4-i)}(s,\rho) = 0 \tag{8}$$

Тогда, учитывая (3) и (8) из (7) имеем:

$$y(x,\rho) = c_1 e^{i\rho x} + c_2 e^{-i\rho x} + c_3 e^{\rho x} + c_4 e^{-\rho x} + \int_x^{\infty} H(x,t,\rho)\, p(t)\, y(t,\rho)\, dt +$$

$$+ \int_x^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H(x,t,\rho)\, H(t,s,\rho)\, p(s)\, y(s,\rho)\, ds\, dt. \tag{9}$$

С помощью разложения в ряд Тейлора убеждается, что ядро $H(x,t,\rho)$ при фиксированных x и t является целой аналитической функцией от ρ и допускает оценку

$$|H(x,t,\rho)| \le \frac{1}{6} |x-t|^3 e^{|\rho|\, |x-t|}, \tag{10}$$

$$|H(x,t,\rho)\, H(t,s,\rho)| \le \frac{1}{6^2} |(x-t)\,(t-s)|^3 e^{[\,|\rho|\, |x-t|\, |t-s|\,]}. \tag{11}$$

Тогда учитывая (2) и (10), (11) получим соответственно оценку

$$\left| \frac{1}{2} H(x,t,\rho)\, p(t)\, e^{\rho(t-x)} \right| \le c_0 |(x-t)|^3 e^{2\,|\rho|\, |x-t| - \varepsilon_0 |t|} \tag{12}$$

и

$$\left| \frac{1}{2} H(x,t,\rho)\, H(t,s,\rho)\, p(t)\, p(s)\, e^{\rho(t-x)} \right| \le$$

$$\le \tilde{c}_0 |(x-t)(t-s)|^3 e^{|\rho|\, [2\,|x-t| - |t-s|] - \varepsilon_0 [|t| + |s|]} \tag{13}$$

Положим в уравнении (9) $c_1 = c_2 = c_4 = 0$, $c_3 = 1$, $y(x,\rho) = e^{\rho x} 2\,(x,\rho)$ получим:

$$z\,(x,\rho) = 1 + \int_x^{\infty} H(x,t,\rho)\, p(t)\, e^{\rho(t-x)} z(t,\rho)\, dt +$$

$$+ \int_x^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H(x,t,\rho)\, H(t,s,\rho)\, p(t)\, p(s)\, e^{\rho(t-x)} z\,(t,\rho)\, dt\, ds. \tag{14}$$

Располагая оценкой (12), (13) можно решить интегральное уравнение (14) методом последовательных приближений. Решение уравнения (14) запишем в виде ряда Неймана

$$z(x,\rho) = 1 + (A+B)\,1 + \left(A^2 + B^2\right)\,1 + ... \tag{15}$$

где $A\,z = c_0 \int_x^\infty H(x,t,\rho)\;p(t)\;e^{\rho(t-x)}\,z(t,\rho)\;dt,$

$$B\,z = \tilde{c}_o \int_x^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} H(x,t,\rho)\;H(t,s,\rho)\;p(t)\,p(s)\;\;e^{\rho(t-x)}\,z\;(t,\rho)\;dt\,ds.$$

Покажем, что для $x \geq 0$ ряд (15) сходится равномерно для всех ρ в области $|\rho| < \frac{\varepsilon_0}{4}$.

Действительно, при $t > x \geq 0$ имеем:

$$|A\,1| \leq c_0 \int_x^\infty |t-x|^3\,e^{2|\rho|\,|t-x| - \varepsilon_0|t|}dt = c_0 \int_x^\infty (t-x)^3\,e^{2|\rho|\,(t-x) - \varepsilon_0 t}dt =$$

$$= c_0 \int_0^\infty t_1^3 e^{2|\rho|\,t_1 - \varepsilon_0(x+t_1)}dt_1 = c_0 e^{-\varepsilon_0 x} \int_0^\infty t_1^3 e^{-(\varepsilon_0 - 2|\rho|)\,t_1}dt_1$$

из $\left(|\rho| < \frac{\varepsilon_0}{4}\right) \Rightarrow \varepsilon_0 - 2\;|\rho| > \frac{\varepsilon_0}{2}$. Поэтому

$$|A\,1| \leq c_0 e^{-\varepsilon_0 x} \int_0^\infty t_1^3 e^{-\frac{\varepsilon_0}{2}\,t_1}dt_1 = \frac{c_0 e^{-\varepsilon_0 x}}{\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^4}.$$

$$\left|A^2\,1\right| \leq \frac{c_0}{\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^4} \int_x^\infty (t-x)^3\,e^{2|\rho|\,(t-x) - 2\varepsilon_0 t}dt =$$

$$= \frac{c_0}{\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^4} \int_0^\infty t_1^3 e^{2|\rho|\,t_1 - 2\varepsilon_0(x+t_1)}dt_1 \leq \frac{c_0 e^{-2\varepsilon_0 x}}{\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^{2\cdot 4} \cdot 3^4},$$

По индукции получим:

$$|A^n\,1| \leq \frac{c_0^n e^{-n\varepsilon_0 x}}{((2n-1)!!)^4 \cdot \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^{2\cdot 4}}.$$

$$|B\,1| \leq \tilde{c}_0 \int_x^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |(x-t)\,(t-s)|^3\,e^{2|\rho|\;[2\,|x-t|+|t-s|] - \varepsilon_0(|t|+|s|)}ds\,dt =$$

$$= \tilde{c}_0 \int_x^\infty \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |t-s|^3\,e^{|\rho|\;|t-s| - \varepsilon_0|s|}ds\right]\,|x-t|^3\,e^{2|\rho|\;|x-t| - \varepsilon_0|t|}dt.$$

Так как,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t-s|^3\,e^{|\rho|\;|t-s| - \varepsilon_0|s|}ds = \int_{-\infty}^{t} |s-t|^3\,e^{|\rho|\;|s-t|}ds + \int_t^{+\infty} |t-s|^3\,e^{|\rho|\;|t-s| - \varepsilon_0|s|}ds =$$

$$= e^{-\varepsilon_0 t}\int_0^\infty t_1^3 e^{-(\varepsilon_0-|\rho|)\,t_1}dt_1 + e^{-\varepsilon_0 t}\int_0^\infty t_1^3 e^{-(\varepsilon_0-|\rho|)\,t_1}dt_1 \le$$

$$\le 2e^{-\varepsilon_0 t}\int_0^\infty t_1^3 e^{-\frac{3}{4}\,t_1}dt_1 = \frac{2\cdot 3!}{\left(\frac{3}{4}\varepsilon_0\right)^4}e^{-\varepsilon_0 t}.$$

Тогда

$$|B\,1| \le \frac{\tilde{c}_0\cdot 2\cdot 3!}{\left(\frac{3}{4}\varepsilon_0\right)^4\cdot 3^4}\int_0^\infty t_1^3 e^{2|\rho|\,t_1-2\varepsilon_0(x+t_1)}dt_1 = \frac{\tilde{\tilde{c}}_0\cdot e^{-2\varepsilon_0 x}}{\left(\frac{3\varepsilon_0}{2}\right)^{2\cdot 4}},$$

где $\tilde{\tilde{c}}_0 = \frac{\tilde{c}_0\cdot 2\cdot(3!)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^4}$.

По индукции получим:

$$|B^n\,1| \le \frac{\tilde{\tilde{c}}_0\cdot e^{-2n\varepsilon_0 x}}{[(4n-1)!!]^4\cdot\left(\frac{3\varepsilon_0}{2}\right)^{4n}}.$$

Поэтому ряд (15) для $x\ge 0$ мажорируется сходящимся числовым рядом и значит, его сумма $z\,(x,\rho)$ будем аналитической по ρ в области $|\rho|<\frac{\varepsilon_0}{4}$ при каждом фиксированном $x\ge 0$. Так как сумма $z\,(x,\rho)$ ряда (15) по модулю не превосходит сумму ряда

$$1+\sum_{n=1}^\infty\left[\frac{c_0^n e^{-n\varepsilon_0 x}}{((2n-1)!!)^4\cdot\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^{4n}}+\frac{\tilde{\tilde{c}}_0\cdot e^{-2n\varepsilon_0 x}}{[(4n-1)!!]^4\cdot\left(\frac{3\varepsilon_0}{2}\right)^{4n}}\right].$$

Отсюда следует ограниченность $z\,(x,\rho)$ в $0\le x<\infty$, $|\rho|<\frac{\varepsilon_0}{4}$. Итак $|z\,(x,\rho)|\le M$, $(M>0)$ равномерно для всех $x\ge 0$ и $|\rho|<\frac{\varepsilon_0}{4}$.

Оценим теперь интегральное слагаемое в (15):

$$|(A+B)\;\bar{\alpha}| \le M\,|A\,1+B\,1| \le M\left(\frac{c_0 e^{-\varepsilon_0 x}}{\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^4}+\tilde{\tilde{c}}_0\cdot\frac{e^{-2\varepsilon_0 x}}{\left(\frac{3\varepsilon_0}{2}\right)^8}\right)\to 0\,\left(e^{-2\varepsilon_0 x}\right),$$

при $x\to+\infty$.

Тогда $z\,(x,\rho) = 1+0\left(e^{-2\varepsilon_0 x}\right)$ равномерно относительно ρ в области $x\in[0,\infty)$, $|\rho|<\frac{\varepsilon_0}{4}$.

Положим $z\,(x,\rho)$ в $y_1\,(x,\rho)=e^{\rho\,x}z\,(x,\rho)$ получим $y_1\,(x,\rho)=e^{\rho\,x}\left[1+0\left(e^{-2\varepsilon\,x}\right)\right]$ при $x\to+\infty$.

Ясно, что это также и решение и.д. уравнения (4) для $x\ge 0$.

Аналогично поступая, докажем, что существуют решения и.д. уравнения (4), аналитические в области $|\rho|<\frac{\varepsilon_0}{4}$ при каждом фиксированном $x\in(0,\infty)$ и такие, что
$y_2\,(x,\rho)=e^{-\rho\,x}\left[1+0\left(e^{-2\varepsilon_0 x}\right)\right]$ при $x\to+\infty$,
$y_3\,(x,\rho)=e^{i\rho\,x}\left[1+0\left(e^{-2\varepsilon_0 x}\right)\right]$ при $x\to+\infty$,
$y_4\,(x,\rho)=e^{-i\rho\,x}\left[1+0\left(e^{-2\varepsilon_0 x}\right)\right]$ при $x\to+\infty$.

Леммы 4.1. доказана.

Точно также, как и доказательство леммы 4.1, можно доказать следующее:

Лемма 4.2. Пусть выполняется условия (2), (3) и $|\rho| < \frac{\varepsilon_0}{4}$. Тогда и.д. уравнение (4) имеет четыре линейно независимых решения $y_k(x,\rho)$ $[k = 1,\, 2,\, 3,\, 4]$, аналитических по ρ в $|\rho| < \frac{\varepsilon_0}{4}$ при каждом фиксированном $x \in (-\infty,\, 0)$ и допускающих асимптотику $y_k(x,\rho) = e^{(i)^k \rho x}\left[1 + 0\left(e^{2\varepsilon_0 x}\right)\right]$ при $x \to -\infty$, $k = 1,\, 2,\, 3,\, 4$.

nt

2. Спектр и резольвента и.д.о. L

Пусть выполняется условие $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |p(x)| \cdot |p(s)|\, dx\, ds = B_2 < \infty$.
Рассмотрим и.д. уравнение

$$Ly = \frac{d^4 y}{dx^4} - \rho^4 y + (P(x) + A_\lambda)\; y = f(x), \tag{16}$$

где $f(x) \in L_2(-\infty,\, +\infty)$.

Предположим, что $\lambda = \rho^4$, $Jm\rho > 0$, не является собственным значением и.д.о. L, так как резольвента R_λ существует. Найдем явный вид резольвенты R_λ и.д.о. L и покажем что она является ограниченным интегральным оператором.

Обозначим символом оператор $L_0 = -\frac{d^4 y}{dx^4}$ в $L^2(-\infty,\infty)$. Это положительно самосопряженный оператор: поэтому для всех $\rho = \rho_1 + i\rho_2$, кроме полуоси $Jm\rho = \rho_2 > 0$, существует резольвента R_λ^0 как ограниченный интегральный оператор. Если $f(x) \in L_2(-\infty,\, \infty)$ и $\lambda = \rho^4$, $Jm\rho > 0$, то решения и.д. уравнения (16) даются формулой

$$y(x,\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} M(x,t,\rho)\; f(t)\; dt + \int_{-\infty}^{+\infty} N(x,t,\rho)\; p(t)\; y(t,\rho)\; dt \tag{17}$$

где

$$N(x,t,\rho) = -\left[M(x,t,\rho) + \int_{-\infty}^{+\infty} N(x,s,\rho)\; M(s,t,\rho)\; ds\right],$$

$$M(x,t,\rho) = \left[\frac{e^{i\rho|x-t|} - e^{-i\rho|x-t|}}{4\rho^3 i} + \frac{e^{\rho|x-t|} - e^{-\rho|x-t|}}{4\rho^3}\right]$$

Так как $\lambda = \rho^4$, $\rho_2 = Jm\rho > 0$, $\rho_1 = Re\rho > 0$ не есть собственное значение и.д.о. L, то (17) разрешимо и мы имеем

$$y(x,\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x,t,\rho)\; f(t)\; dt = R_\lambda f,$$

где $T(x,t,\rho) = M(x,t,\rho) + \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x,s,\rho)\; M(s,t,\rho)\; ds$ и $\Gamma(x,s,\rho)$- резольвентное ядро для ядра $N(x,t,\rho)$.

Следовательно, резольвента R_λ есть интегральный оператор с ядром $T(x,t,\rho)$.

Докажем теперь, что это ядро фактически задает интегральный оператор, ограниченный и определенный во всем пространстве $L^2(R)$.

Сначала используя

$$N(x,t,\rho) = Q(x,t,\rho)$$

и

$$Q_n(x,t,\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x,s,\rho)\ Q_{n-1}(s,t,\rho)\ ds$$

покажем что

$$\Gamma(x,t,\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x,t,\rho)$$

сходится, если $|\rho| < \sqrt[3]{\frac{B_2-q}{2}}$ и $|\rho| > \sqrt[3]{\frac{B_2+q}{2}}$, где $q = \sqrt{B_2^2 - \frac{4B_2(\rho_1+\rho_2)}{2}}$.

При $Jm\rho > 0$, $Re\rho > 0$ имеем $e^{-\rho_2|x-t|} \leq 1$, $e^{-\rho_1|x-t|} \leq 1$, $e^{-\rho_2|x|} < 1$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho_2|s|}ds = \frac{2}{\rho_2}$.

Тогда

$$|N(x,t,\rho)| = |Q(x,t,\rho)| = \frac{1}{|\rho^3|} + \frac{1}{|\rho^3|}\left[\frac{e^{-\rho_2|t|}}{2\ |\rho^3|}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho_2|s|}ds + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-\rho_1|t|}}{2\ |\rho^3|}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho_1|s|}ds\right]\ |p(t)| \leq \frac{1}{|\rho^3|}\ \left(1 + \frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2\ |\rho^3|}\right)\ |p(t)|\,.$$

По индукции получим:

$$|Q_n(x,\,t,\,\rho)| \leq \left\{\frac{1}{|\rho^3|}\ \left(1 + \frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2\ |\rho^3|}\right)\right\}^n \int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} |p(t)| \cdot \prod_{j=1}^{n-1} |p(s_j)|\ ds_j.$$

Тогда

$$|\Gamma(x,\,t,\,\rho)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |Q_n(x,\,t,\,\rho)| \leq$$

$$\leq |p(t)| \cdot \left\{\frac{1}{|\rho^3|}\ \left(1 + \frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2\ |\rho^3|}\right)\right\}^n \int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty}\ \prod_{j=1}^{n-1} |p(s_j)|\ ds_j \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_2^{n-1}}{|\rho^3|^{n-1}} \cdot \frac{|p(t)|}{|\rho^3|}\ \left[1 + \frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2\ |\rho^3|}\right]^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{B_2}{|\rho^3|}\ \left[1 + \frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2\ |\rho^3|}\right]\right\}^{n-1} \cdot \frac{|p(t)|}{|\rho^3|}\ \left(1 + \frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2\ |\rho^3|}\right).$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{B_2}{|\rho^3|}\left(1+\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2\,|\rho^3|}\right)\right\}^{n-1} \tag{18}$$

сходится, если

$$\frac{B_2}{|\rho^3|}\left(1+\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2\,|\rho^3|}\right)<q_1<1. \tag{19}$$

Решаем этого неравенство, относительно $|\rho|$, найдем, что в области $|\rho|<\sqrt[3]{\frac{B_2-q_1}{2}}$ и $|\rho|>\sqrt[3]{\frac{B_2+q_1}{2}}$ нет спектра и.д.о. L .

Сумма этого ряда равна $\frac{|\rho^6|\;\rho_1\,\rho_2}{|\rho^6|-B_2(1+\rho_1+\rho_2)}$.

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}Q_n\,(x,\,t,\,\rho)$ мажорируется сходящимся числовым рядом (18) и значит, его сумма $\Gamma\,(x,\,t,\,\rho)$ будет аналитической по ρ в области $Jm\rho>0$, $Re\rho>0$ при каждом фиксированном x. Тогда допустимо почленное интегрирование ряда $\sum_{n=1}^{\infty}Q_n\,(x,\,t,\,\rho)$.

Таким образом

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}T\,(x,t,\rho)\;f\,(t)\;dt\right|^2\leq\int_{-\infty}^{+\infty}|M\,(x,t,\rho)|\;\;|f\,(t)|\;dt+$$

$$+\frac{|\rho^6|\;\;\rho_1\,\rho_2}{|\rho^6|-B_2\,(1+\rho_1+\rho_2)}\left(1+\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2\;|\rho^3|}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|M\,(x,s,\rho)|\;\;|p\,(t)|\;\;|f\,(t)|\;dt\,ds.$$

Так как $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\rho_2|x-t|}dt=\frac{1}{2}$. По этому применяя неравенство буняковского, легко убедиться, что

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\rho_2|x-t|}}{4\,|\rho^3|}\;|f\,(t)|\;dt\right)\leq\|f\|^2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2\rho_2|x-t|}}{16\;|\rho^6|}\;dt=\frac{\|f\|^2}{16\rho_2\;|\rho^6|}.$$

Поэтому

$$|R_\lambda f|\leq\frac{\|f\|^2\,(\rho_1\;+\rho_2)}{8\;|\rho^3|-\rho_1\rho_2}\left[\frac{1}{|\rho^3|}+\frac{\rho_1\,\rho_2\,B_2^2}{|\rho^6|-B_2\,(1+\rho_1+\rho_2)}\left(1+\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2\;|\rho^3|}\right)\right].$$

Итак, для любой функции $f\,(x)\in L^2\,(R)$ формула (18) определяет функцию $y\,(x)\in L^2\,(R)$. Легко непосредственно проверить, что $y\,(x,\rho)$ удовлетворяет уравнению (17), а следовательно и и.д. уравнению (16).

Итак, замкнутый оператор R_λ определен на всем пространстве $L^2\,(R)$.

Пусть, теперь $y\,(x,\lambda)$ собственная функция (с.ф.) и.д.о. L, соответствующая собственному значению (с.з) λ. Тогда она определяется из уравнения

$$y(x,\rho)=\frac{1}{4\left|\rho^3\right|}\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,t,\rho)\,p(t)\,y(t,\rho)\;dt\;\;,\quad Jm\rho>0\;\;,$$

где

$$G(x,t,\rho)=\frac{1}{4\,\rho^3}\left(ie^{i\rho|x-t|}-e^{-\rho|x-t|}\right)+$$

$$+\frac{1}{16\rho^6}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(ie^{i\rho|x-s|}-e^{-\rho|x-s|}\right)\left(ie^{i\rho|s-t|}-e^{-\rho|s-t|}\right)\;ds.$$

Поэтому с.з. являются нулями определителя Фредгольма

$$D(\rho)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\;D_n(\rho)\,,$$

где $D_n(\rho)=\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}\det\left\|G_\rho(t_i,t_j)\right\|\prod_{k=1}^{n}|p(t_k)|\;dt_k\;,\;\left(\begin{array}{c}i=1,\,2,...,n\\ j=1,\,2,...,n\end{array}\right).$

Здесь введены следующие обозначения

$\det\left\|G_\rho(t_i,t_j)\right\|=G_\rho\left(\begin{array}{c}t_1,\,t_2,...,t_n\\ t_1,\,t_2,...,t_n\end{array}\right)$ и $G_\rho(t_i,t_j)=G_\rho(t_i,t_j,\rho)\,\left(i,j=\overline{1,n}\right)$.

Поэтому оператор R_λ не существует только для тех ρ, для которых $D(\rho)=0$.

Теперь докажем следующую лемму:

Лемма 5.1. Пусть выполняется условие (2) и (3). Тогда функция $D(\rho)$ допускает аналитическое продолжение через вещественную положительную полуось в области $E=\left\{|\rho|\geq r>0\;,\;\;Jm\rho>-\frac{\varepsilon_0}{2}\;,\;\;Re\rho>0\right\}$, r-фиксированное число.

В области E справедлива оценка

$$\left|\det\left\|G_\rho(t_i,t_j)\right\|\prod_{j=1}^{n}p(t_j)\;dt_k\right|\leq n^{n/2}\prod_{j=1}^{n}|p(t_j)|\;\;e^{\varepsilon_0|t_j|}\;\left(\frac{1}{2\left|\rho^3\right|}\right)^n\left(1+\frac{1}{\varepsilon_0\left|\rho^3\right|}\right)^n\qquad(20)$$

Используя условие (2), (3) и оценку (20), имеем

$$|D_n(\rho)|\leq\left[\frac{\sqrt{n}}{2r^3}\left(1+\frac{1}{\varepsilon_0r^3}\right)\;B_1\right]^n$$

для всех $\rho\in E$. Поэтому в области E

$$|D(\rho)|\leq 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\;\left[\frac{\sqrt{n}}{2r^3}\left(1+\frac{1}{\varepsilon_0r^3}\right)\;B_1\right]^n.$$

Следовательно, $D(\rho)$- аналитическая в области E функция.

Рассмотрим функции от L:

$$f(L) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n}L)^n}{n!}\ , \quad L \geq 0.$$

$f(L)$ определена для всех $L \geq 0$ и в этой области монотонно возрастает, $f(0) = 0$, поэтому существует единственное L_0, определяемое условием $f(L_0) = 1$.

Выберем число r так, чтобы

$$\frac{B_1}{2r^3}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_0 r^3}\right) < L_0.$$

Тогда для

$$|\rho| \geq r > \sqrt[3]{\frac{2}{-\varepsilon_0 - \sqrt{\varepsilon_0^2 - 8\varepsilon_0 L_0/B}}} = R_0, \tag{21}$$

$$|D(\rho)| \leq 1 - \left|\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{n}}{2r^3}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_0 r^3}\right) \cdot B_1\right]^n \cdot \frac{1}{n!}\right| \neq 0,$$

т.е. для достаточно больших $|\rho|$ $D(\rho) \neq 0$.

Итак, $D(\rho) \not\equiv 0$ при достаточно больших $|\rho|$ в области E. Поэтому из теории Фредгольма следует, что комплексное собственное значение и.д.о. L образует не более чем счетное множество точек с единственно возможной точкой сгущения в нуле.

Теорема 2.1. Множество собственных значений и.д.о. L ограничено. Единственно возможной точкой сгущения его является точка $\lambda = 0$.

Формула (21) дает также оценку радиуса того круга в комплексной λ- плоскости $\left(\lambda = \rho^4\right)$, вне которой заведомо нет собственных значений и.д.о. L.

Именно, для $|\lambda| \geq R = R_0^4$ и.д.о. L не имеет собственных значений.

В силу леммы 5.1 $D(\rho)$ аналитическая функция на вещественной прямой ρ плоскости. Поэтому нули функции $D(\rho)$ не могут иметь предельных точек на вещественной оси, но так как они образуют ограниченное множество, не имеющее других предельных точек, то этих нулей конечное число. Итак, справедлива

Теорема 5.2. Если выполнены условия (2), (3) и $\lambda = 0$ не является точкой сгущения собственных значений, то и.д.о. L может иметь только конечное число комплексных собственных значений, которые все отличны от нуля.

Пусть теперь $\lambda_0 > 0$-собственное значение и.д.о. L, т.е. существует функция $y_0(x) \in L^2(-\infty, +\infty)$, $y_0(x) \not\equiv 0$, такая, что

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \left(p(x) + A_{\lambda_0}\right) y_0 \equiv \lambda_0 y_0(x).$$

После очевидных преобразований легко получить интегральное уравнение

$$y_0\left(x, \sqrt[4]{\lambda_0}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} N\left(x, t, \sqrt[4]{\lambda_0}\right) p(t)\, y_0\left(t, \sqrt[4]{\lambda_0}\right)\, dt. \tag{22}$$

При $0 < \arg\rho < \frac{\pi}{4}$ оператор

$$N_{\rho_0} y_0\left(x, \sqrt[4]{\lambda_0}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} N\left(x, t, \sqrt[4]{\lambda_0}\right) p(t)\, y_0\left(t, \sqrt[4]{\lambda_0}\right) dt$$

будет оператором Гильберта-Шмидта, причем он аналитически зависит от ρ, ядро оператора непрерывная и ограниченная функция, поэтому применима теория Фредгольма. Решение (22) можно записать с помощью определителей Фредгольма:

$$y_0\left(x, \sqrt[4]{\lambda_0}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{D\left(x, t, \sqrt[4]{\lambda_0}\right)}{D\left(\sqrt[4]{\lambda_0}\right)} p(t)\, y_0\left(t, \sqrt[4]{\lambda_0}\right) dt. \quad (23)$$

Из (23) видно, что положительные собственные значения и.д.о. L также находится среди нулей знаменателя Фредгольма $D(\rho)$.

Подводя итоги, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 5.3. Спектр и.д.о. L при выполнении условия (2), (3) состоит разве что из конечного числа комплексных собственных значений и непрерывного спектра, заполняющего ось $\lambda > 0$, причем на непрерывном спектре возможно конечное число положительных собственных значений.

Рассматривая нами задача частично изучена в [4] .

Список литературы

[1] Алмамедов М.С. О спектре линейного интегро-дифференциального операторв второго порядка на всей оси. Известия АН Азерб. ССР. 1968, No.3, стр. 110-117.

[2] Алмамедов М.С. О спектре линейного интегро-дифференциального операторв четвертого порядка на всей оси. Док. АН СССР. 1988, т. 299, No.3, стр. 525-529.

[3] Наймарк М.А. Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного линейного дифференцального оператора второго порядка на пол оси. Тр. Московского Математического общества No.3, 1954, стр. 181-270.

Алмамедов М.С.
Азербайджанский Государственный Экономический Университет

Received 10 May 2017
Accepted 5 June 2017