Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 8, No 1, 2018, July
ISSN 2222-5498

Единственность Восстановления Системы Дирака По Трем Спектрам

Н.В. Аббаслы, И.М. Набиев

Аннотация. В работе рассматривается задача восстановления оператора Дирака с обобщенными периодическими граничными условиями. Доказана теорема единственности решения обратной задачи по трем спектрам.

Ключевые слова: система Дирака, неразделенные граничные условия, собственные значения, обратная спектральная задача.

2010 Mathematics Subject Classifications: 34A55; 34B24; 34L05; 47E05

1. Введение

Рассмотрим краевую задачу, порожденную на отрезке $[0, \pi]$ каноническим уравнением Дирака [1]

$$BY'(x) + Q(x)Y(x) = \lambda Y(x), \tag{1}$$

и неразделенными граничными условиями вида

$$A_0 Y(0) + A_1 Y(\pi) = 0, \tag{2}$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$, $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$, $A_0 = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} a_4 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda-$ спектральный параметр, $p(x)$ и $q(x)$ – вещественные функции, принадлежащие пространству $L_2[0, \pi]$, $a_i,\ b_j\ (i = \overline{1,4};\ j = 1, 2)$ – комплексные числа, причем хотя бы один из коэффициентов a_i и хотя бы один из коэффициентов b_j отличны от нуля.

В настоящее время многие вопросы обратных спектральных задач для системы Дирака в случае разделенных граничных условий ($a_2 = b_1 = 0$ или $a_1 = b_2 = 0$) хорошо изучены (см. [2-13]). Исследованию обратных задач для уравнения (1) с различными видами неразделенных граничных условий, в том числе с периодическими ($a_2 = -a_1,\ a_3 = a_4 = 0, b_2 = -b_1$), антипериодическими ($a_2 = a_1,\ a_3 = a_4 = 0, b_2 = b_1$)

и квазипериодическими ($|a_2| = |a_1|$, $a_2 \neq \pm a_1$, $a_3 = a_4 = 0, |b_2| = |b_1|$, $b_2 \neq \pm b_1$) граничными условиями посвящены статьи [14-18].

В настоящей работе доказана единственность восстановления системы Дирака по спектральным данным, которыми являются спектры трех краевых задач. Аналогичный вопрос для оператора Штурма-Лиувилля рассмотрен в работе [19].

Общее решение уравнения (1) имеет вид $y(x, \lambda) = M_1 S(x, \lambda) + M_2 C(x, \lambda)$, где M_1 и M_2 – произвольные постоянные, а $S(x, \lambda) = \begin{pmatrix} s_1(x, \lambda) \\ s_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$ и $C(x, \lambda) = \begin{pmatrix} c_1(x, \lambda) \\ c_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$ – решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям $S(0, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C(0, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Поэтому собственные значения краевой задачи (1)-(2) совпадают с нулями характеристической функции

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 s_2(\pi, \lambda) + a_4 s_1(\pi, \lambda) & a_3 + a_2 c_2(\pi, \lambda) + a_4 c_1(\pi, \lambda) \\ b_2 s_1(\pi, \lambda) & b_1 + b_2 c_1(\pi, \lambda) \end{vmatrix}.$$

Раскрывая этот определитель и учитывая тождество

$$c_1(x, \lambda) s_2(x, \lambda) - c_2(x, \lambda) s_1(x, \lambda) \equiv 1,$$

находим

$$\Delta(\lambda) = a_1 b_2 c_1(\pi, \lambda) + a_2 b_1 s_2(\pi, \lambda) + (a_4 b_1 - a_3 b_2)\, s_1(\pi, \lambda) + a_1 b_1 + a_2 b_2. \qquad (3)$$

В дальнейшем будем предполагать, что числа b_1 и b_2 вещественны.

2. Постановка обратной задачи. Теорема единственности

Говорят, что краевая задача (1)-(2) записана в каноническом виде, если $a_4 = 0$ при $b_1 = 0$, а также $a_3 = 0$ при $b_1 \neq 0$. Отметим, что задачу (1)-(2) всегда можно привести к каноническому виду. В дальнейшем задачу (1)-(2), записанную в каноническом виде, будем обозначать через D.

Задачу, отличающуюся от задачи D коэффициентами в уравнении и параметрами в граничных условиях, будем обозначать через $\tilde{D}$. Ниже будем считать, что если некоторый символ обозначает объект, относящийся к задаче D, то этот же символ с ˜ обозначает аналогичный объект, относящийся к $\tilde{D}$.

Наряду с задачей D рассматриваются следующие задачи с разделенными граничными условиями.

Задача D_1:

$$BY'(x) + Q(x)Y(x) = \lambda Y(x), \quad x \in [0, \pi],$$

$$y_2(0) - b_1 y_1(0) = 0, y_1(\pi) = 0.$$

Задача D_2:

$$BY'(x) + Q(x)Y(x) = \lambda Y(x), \quad x \in [0, \pi],$$

$$y_2(0) - b_2 y_1(0) = 0, y_1(\pi) = 0,$$

где $b_1 \neq b_2$.

Обозначим через $\{\mu_k\}$, $\left\{\mu_k^{(1)}\right\}$ и $\left\{\mu_k^{(2)}\right\}$ последовательности собственных значений (спектры) краевых задач D, D_1 и D_2 соответственно.

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Обратная задача. По заданным спектрам краевых задач D, D_1 и D_2 построить матрицу-функцию $Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$ в уравнении (1) и коэффициенты a_i, b_j $(i = \overline{1,4};\ j = 1,2)$ в граничных условиях.

Справедлива следующая теорема единственности.

Теорема. *Если $b_1 \neq \pm b_2$, то спектры $\{\mu_k\}$, $\left\{\mu_k^{(1)}\right\}$ и $\left\{\mu_k^{(2)}\right\}$ однозначно определяют краевые задачи D, D_1 и D_2.*

Доказательство. Согласно работе [2] по спектрам $\left\{\mu_k^{(1)}\right\}$ и $\left\{\mu_k^{(2)}\right\}$ однозначно восстанавливаются задачи D_1 и D_2 (т.е. однозначно восстанавливаются матрица-функция $Q(x)$ и параметры b_1, b_2). Значит, остается установить единственность восстановления коэффициентов a_i, $(i = \overline{1,4})$ граничного условия (2).

По заданной последовательности $\{\mu_k\}$ характеристическая функция $\Delta(\lambda)$ восстанавливается однозначно в виде бесконечного произведения. Известно [20, с. 66], что для функций $c_1(\pi, \lambda)$, $s_1(\pi, \lambda)$ и $s_2(\pi, \lambda)$ имеют место следующие представления:

$$c_1(\pi, \lambda) = \cos \lambda\pi + \psi_1(\lambda),$$

$$s_1(\pi, \lambda) = -\sin \lambda\pi + \psi_2(\lambda), s_2(\pi, \lambda) = \cos \lambda\pi + \psi_3(\lambda),$$

где $\psi_p(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \xi_p(t)\, e^{i\lambda t} dt$, $\xi_p(t) \in L_2[-\pi, \pi]$, $p = \overline{1,3}$.
Используя эти представления, характеристическую функцию (3) преобразуем к виду

$$\Delta(\lambda) = M \cos \lambda\pi + N \sin \lambda\pi + K + \psi(\lambda), \tag{4}$$

где

$$M = a_1 b_2 + a_2 b_1, N = a_4 b_1 - a_3 b_2, K = a_1 b_1 + a_2 b_2, \tag{5}$$

$\psi(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \xi(t)\, e^{i\lambda t} dt$, $\xi(t) \in L_2[-\pi, \pi]$. Поскольку спектры $\{\mu_k\}$, $\{\tilde{\mu}_k\}$ краевых задач D, $\tilde{D}$ совпадают, то $\Delta(\lambda) \equiv \tilde{\Delta}(\lambda)$. Тогда в силу (4) имеем

$$M \cos \lambda\pi + N \sin \lambda\pi + K + \psi(\lambda) = \tilde{M} \cos \lambda\pi + \tilde{N} \sin \lambda\pi + \tilde{K} + \tilde{\psi}(\lambda),$$

где

$$\tilde{M} = \tilde{a}_1 b_2 + \tilde{a}_2 b_1, \tilde{N} = \tilde{a}_4 b_1 - \tilde{a}_3 b_2, \tilde{K} = \tilde{a}_1 b_1 + \tilde{a}_2 b_2 \tag{6}$$

(так как $b_j = \tilde{b}_j$) и $\tilde{\psi}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\xi}(t)\, e^{i\lambda t} dt$, $\xi(t) \in L_2[-\pi, \pi]$. Поэтому

$$\left(M - \tilde{M}\right)\cos\lambda\pi + \left(N - \tilde{N}\right)\sin\lambda\pi + K - \tilde{K} + \psi(\lambda) - \tilde{\psi}(\lambda) = 0. \tag{7}$$

Пусть $k-$произвольное целое число. Полагая в последнем равенстве $\lambda = 2k$, затем переходя к пределу при $k \to \infty$ и используя лемму Римана-Лебега, получаем $M - \tilde{M} + K - \tilde{K} = 0$. Отсюда учитывая соотношения (5) и (6), имеем $(a_1 - \tilde{a}_1 + a_2 - \tilde{a}_2)(b_1 + b_2) = 0$. Тогда

$$a_1 - \tilde{a}_1 + a_2 - \tilde{a}_2 = 0, \tag{8}$$

поскольку по условию теоремы $b_1 \neq -b_2$. Аналогично, в результате подстановки $\lambda = 2k + 1$ в равенство (7) и перехода к пределу при $k \to \infty$ получаем $a_1 - \tilde{a}_1 - a_2 + \tilde{a}_2 = 0$. Это соотношение вместе с (8) показывает, что

$$a_1 = \tilde{a}_1, a_2 = \tilde{a}_2. \tag{9}$$

Учитывая (9), из (7) при $\lambda = 2k + \frac{1}{2}$ легко получается, что

$$(a_4 - \tilde{a}_4)\, b_1 - (a_3 - \tilde{a}_3)\, b_2 = 0. \tag{10}$$

Возможны два случая: $b_1 = 0$ и $b_1 \neq 0$. Если имеет место первый случай, то в силу условия теоремы $b_2 \neq 0$. Тогда из (10) получаем $a_3 = \tilde{a}_3$. Так как краевые задачи D, $\tilde{D}$ представлены в каноническом виде, то в этом случае $a_4 = \tilde{a}_4 = 0$. Если же $b_1 \neq 0$, то $a_3 = \tilde{a}_3 = 0$ и, следовательно, $a_4 = \tilde{a}_4$ в силу (10).

Таким образом, по спектрам краевых задач *D, D_1 и D_2* однозначно восстанавливаются как коэффициент $Q(x)$ уравнения Дирака, так и параметры a_i, b_j $(i = \overline{1,4};\ \ j = 1,2\,)$ граничных условий. Теорема доказана.

□

Список литературы

[1] *Гасымов М.Г., Левитан Б.М.* Обратная задача для системы Дирака // Докл. АН СССР. 1966. Т. 167. No. 5. С. 967-970.

[2] *Гасымов М.Г., Джабиев Т.Т.* Решение обратной задачи по двум спектрам для уравнения Дирака на конечном отрезке // Докл. АН Азерб. ССР. 1966. Т. 22. No. 7. С. 3-6.

[3] *Маламуд М.М.* Вопросы единственности в обратных задачах для систем дифференциальных уравнений на конечном интервале // Тр. Моск. мат. о-ва. 1999. Т. 60. С. 199-258.

[4] *Watson B.A.* Inverse spectral problems for weighted Dirac systems // Inverse Problems. 1999. V. 15. P. 793-805.

[5] *Mochizuki R., Trooshin I.* Inverse problem for interior spectral data of the Dirac operator // Comm. Korean Math. Soc. 2001. V. 16. No. 3. P. 437-442.

[6] *Юрко В.А.* Обратная спектральная задача для сингулярных несамосопряженных дифференциальных систем // Матем. сборник. 2004. Т. 195. No. 12. С. 123-156.

[7] *Albeverio S., Hryniv R., Mykytyuk Ya.* Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials // Russian J. Math. Physics. 2005. V. 12. No. 4. P. 406-423.

[8] *Amirov R. Kh., Keskin B., Ozkan A. S.* Direct and inverse problems for the Dirac operator with a spectral parameter linearly contained in a boundary condition // Ukrainian Math. J. 2009. V. 61. No. metricconverterProductID9. C9. C. 1365-1379.

[9] *Гусейнов И.М., Лятифова А.Р.* Об операторе преобразования для системы уравнений Дирака с суммируемыми потенциалами // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11. Вып. 1. С. 19-24.

[10] *Çöl A., Mamedov Kh.R.* On an inverse scattering problem for a class of Dirac operators with spectral parameter in the boundary condition // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 393 P. 470–478.

[11] *Sat M., Panakhov E.S., Tas K.* Wellposedness of the inverse problem for Dirac operator // Chinese J. of Math. 2013. V. 2013. Art. ID 279394. 5 P.

[12] *Mamedov Kh. R., Akcay O.* Inverse eigenvalue problem for a class of Dirac operators with discontinuous coefficient // Boundary Value Probl. 2014. 20 P.

[13] *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Оператор Дирака с комплекснозначным суммируемым потенциалом // arXiv: 1412.6757v1 [math.SP] 21 Dec 2014. 34 P.

[14] *Мисюра Т.В.* Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака. II // Теория функций, функц. анализ и их прил. 1979. Вып. 31. С. 102-109.

[15] *Nabiev I.M.* Solution of a class of inverse problems for the Dirac operator // Transactions of Acad. of sci. of Azerb., ser. of phys.-tech. and math. sci. 2001. V. 21. No. 1. P. 146-157.

[16] *Nabiev I.M.* Characteristic of spectral data of Dirac operators // Transactions of Acad. of sci. of Azerb., ser. of phys.-tech. and math. sci. 2004. V. 24. No. 7. P. 161-166.

[17] *Korotyaev E.* Inverse Problem and Estimates for Periodic Zakharov-Shabat systems. J. Reine Angew. Math. 2005. V. 583. P. 87-115.

[18] *Набиев И.М.* Решение обратной квазипериодической задачи для системы Дирака // Матем. заметки. 2011. Т. 89. No. 6. С. 885-893.

[19] *Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М.* Обратная задача Штурма-Лиувилля с обобщенными периодическими краевыми условиями // Докл. РАН. 2008. Т.421. No. 5. С. 599-601.

[20] *Марченко В.А.* Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.

Н.В. Аббаслы
Бакинский государственный университет
*Email:*abbaslinigar1@gmail.com

И.М. Набиев
Бакинский государственный университет
Институт математики и механики НАН Азербайджана
Университет Хазар, Азербайджан
*Email:*nabievim@yahoo.com