Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 8, No 1, 2018, July
ISSN 2222-5498

Об Оценках Типа Вимана-Валирона для Степенных Рядов с Конечным Радиусом Сходимости

Н.М. Сулейманов , Д.Е. Фараджли

Аннотация. В работе устанавливаются оценки типа Вимана-Валирона для степенных рядов с конечным радиусом сходимости. Причем исключительные множества охарактеризованы в терминах логарифмической меры. Кроме того были расширены классы функций $\varphi(y)$, через которые выражаются оценки типа Вимана-Валирона-Ковари.

Ключевые слова: оценки типа Вимана-Валирона, логарифмическая мера, e -плотность, исключительное множества, мера Лебега.

1. Введение

Пусть

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \tag{1}$$

-целая функция,

$$M(r) = \max |f(z)| \ , \quad \mu(r) = \max_n |a_n| r^n$$

-максимум модуля и максимальный член функции $f(z)$ в круге $|z| \leq r$. Известно, что $M(r) \to \infty\,,\ \mu(r) \to \infty$ при $r \to \infty$, и всегда $\mu(r) \leq M(r)$. Очень важно в приложениях получить оценку $M(r)$ сверху через $\mu(r)$, т.е. найти функцию $\psi(y) > 0,\ \ y > 0$ (или класс таких функций), с помощью которой выполнялось бы (в определенном смысле) неравенство типа

$$M(r) \leq \psi(\mu(r)) . \tag{2}$$

Первый такой результат, ставший в последствии классическим, был установлен в начале прошлого века Виманом [1] и Валироном [2]. Их результат таков: справедливо неравенство вида

$$M(r) \leq \mu(r) (\log \mu(r))^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \ , \ \ \varepsilon > 0. \tag{3}$$

Причем это неравенство выполняется вне, возможно, некоторого множества $E_r \subset (0,\infty)$ (исключительное множество) конечной логарифмической меры, $\int_{E_r} \frac{dr}{r} < \infty$. В общих ситуациях все параметры в (3) (число ε, сомножитель $\log \mu(r)$, множество E_r) присутствуют по-существу. Однако, например, для целых функций конечного порядка неравенство (3) может быть заменено более простым и точным неравенством (можно убрать ε)

$$M(r) \le \mu(r)\sqrt{\log \mu(r)}.$$

(Напомним, что порядком целой функции $f(z)$называется число $\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}$.)
В 1963 году американский математик Розенблюм [3] установил следующий более общий и более точный результат:

Пусть $\varphi(y) > 0,\ y > 0$-непрерывная возрастающая функция такая, что выполняется условие

$$\int^{\infty} \left(\int^{y} \varphi(t)\, dt \right)^{-\frac{1}{2}} dy < \infty. \tag{4}$$

Тогда для любого r_0 существует $r > r_0$ такое, что справедлива оценка вида

$$M(r) \le \mu(r)\sqrt{\varphi(\log M(r))}. \tag{5}$$

При некоторых дополнительных ограничениях на функцию $\varphi(y)$ неравенство (5) выполняется вне некоторого множества конечной логарифмической меры. При этом в работе Розенблюма оставались нерешенными вопросы: насколько необходимо условие (4) для справедливости результата (5)? в каких терминах размера можно (и нужно) охарактеризовать исключительные множества (в терминах меры Лебега, в терминах плотности или емкости, в терминах логарифмической меры или еще других концепций размера?). Отметим сразу, что некоторые из этих вопросов были решены в работах автора (см. [4-6]).

В работе Ковари [7] используя метод работы Розенблюма были установлены аналогичные результаты для степенных рядов с конечным радиусом сходимости, где размеры исключительных множеств были охарактеризованы в терминах, так называемой "l-плотности". При этом l-плотностью множества $E_r \subset (0,1)$ называется выражение вида

$$dl(E_r) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\log\left(\frac{1}{-x}\right)} \int_{E \bigcap (-1,x)} \frac{dx}{-x},$$

где множество E_r отображается функцией $x = \log r$ на подмножество $E \subset (-\infty, 0)$, а число, определяемое формулой

$$l(E_r) = \int_{E \bigcap (-1,0)} \frac{dx}{-x},$$

называется l-мерой множества $E_r \subset (0,1)$.

Приводим основной результат Ковари. Пусть $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$-положительные, возрастающие функции такие, что
$\int \frac{dy}{\psi_j(y)} < \infty, \ \ 1 \leq \frac{\psi_j(y)}{y} \to \infty, \ \ y \to \infty$ и $\psi(y) = \psi_2(\psi_1(y))$.
Тогда для степенного ряда (1) с радиусом сходимости, равным единице, справедлива следующая оценка типа Розенблюма:

$$M(r) \leq \frac{\mu(r)}{1-r}\sqrt{\psi(\log M(r))}. \tag{6}$$

В работах автора (см. [4,5]) была построена теория оценок типа Вимана-Валирона для решений дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве.

2. Постановка задачи

В настоящей статье устанавливаются более общие оценки типа Вимана-Валирона для степенных рядов с конечным радиусом сходимости, в которых исключительные множества охарактеризованы в терминах логарифмической меры или меры Лебега.

Рассмотрим степенной ряд (1) с радиусом сходимости, равным единице. Следующая Лемма доказана в работе автора [4 стр. 67]:

Лемма. Пусть $\varphi(y) > 0, \ y > 0$-удовлетворяет условию (4). Пусть $g \in C^2(0,\infty)$ -положительная, выпуклая, возрастающая функция, $g(0) \geq 1$ и

$$E = \left\{t > 0, g''(t) > \varphi(g(t))\right\}. \tag{7}$$

Тогда $mesE < \infty$. Следовательно, вне $E, \ mesE < +\infty$, верно неравенство

$$g''(t) \leq \varphi(g(t)). \tag{8}$$

В следующей теореме установлена оценка исключительного множества вблизи нуля для дифференциального неравенства в составе множества e в (10).

Теорема 1. Пусть функция $\varphi(y)$ удовлетворяет условию (4). Пусть $g \in C^2(0,1)$-выпуклая (вниз) убивающая функция, $g(1) \geq 1$.

Тогда множество

$$e = \left\{t \in (0,1] : g''(t) > t^{-\alpha}\varphi\left(t^{-\beta}g(t)\right)\right\}, \ \ \alpha, \beta \geq 0, \tag{9}$$

имеет конечную логарифмическую меру, $\int_e \frac{dt}{t} < \infty$.

Следствие. Вне множества e конечной логарифмический меры справедливо дифференциальное неравенство

$$g''(t) \leq t^{-\alpha}\left(t^{-\beta}g(t)\right). \tag{10}$$

Доказательство. Введем новые функции:

$$G(t) = t^{-\beta}g(t), \ \ t = e^{-\tau}, \ \ H(\tau) = G\left(e^{-\tau}\right).$$

Имеем:

$$H'(\tau) = -e^{-\tau} G'\left(e^{-\tau}\right),$$

$$H''(\tau) = e^{-\tau} G'\left(e^{-\tau}\right) + e^{-2\tau} G''\left(e^{-\tau}\right) = tG'(t) + t^2 G''(t). \tag{11}$$

С другой стороны, имеем:

$$G'(t) = -\beta t^{-\beta-1} g(t) + t^{-\beta} g'(t);$$

$$G''(t) = \beta(\beta+1) t^{-\beta-2} g(t) - 2\beta t^{-\beta-1} g'(t) + t^{-\beta} g''(t).$$

Тогда из (11) получим:

$$H''(\tau) = \beta^2 t^{-\beta} g(t) + (1-2\beta) t^{-1-\beta} g'(t) + t^{2-\beta} g''(t). \tag{12}$$

Выберем $\beta \geq \frac{1}{2}$. Тогда $(1-2\beta) g' > 0$ (g-убывает).

Следовательно, из (12) получим:

$$H''(\tau) \geq \beta^2 t^{-\beta} g(t) + t^{2-\beta} g''(t). \tag{13}$$

(при $\beta = \frac{1}{2}$ получается точное равенство).

(**Замечание.** В общей ситуации можно предполагать, что выполняется соотношение

$$\beta^2 t^{-\beta} g(t) + t^{2-\beta} g''(t) > (2\beta - 1) t^{1-\beta} g'(t) \, (*)$$

которое всегда верно при $\beta = \frac{1}{2}$.)

Тогда из (12) получим:

$$g''(t) \leq t^{\beta-2} H''(\tau) - \beta^2 t^{-2} g(t) = e^{(2-\beta)\tau} H''(\tau) - \beta^2 e^{2\tau} g(t). \tag{14}$$

Так как

$$g(t) = t^{\beta} G(t) = e^{-\beta\tau} G\left(l^{-\tau}\right) = e^{-\beta\tau} H(\tau),$$

то из (14) имеем:

$$g''(t) \leq e^{(2-\beta)\tau} \left[H''(\tau) - \beta^2 H(r)\right]. \tag{15}$$

Тогда неравенство в составе множества e в (9) примет вид:

$$e^{(2-\beta)\tau} \left[H''(\tau) - \beta^2 H(\tau)\right] > t^{-2} \varphi\left(t^{-\beta} g(t)\right) = e^{\alpha\tau} \varphi(H(\tau)).$$

Отсюда (выбирая $\alpha + \beta = 2$) получаем неравенство

$$H''(\tau) > \beta^2 H(\tau) + \varphi(H(\tau)). \tag{16}$$

Тогда, в силу леммы, следует, что множество E, на котором выполнено неравенство (16), имеет конечную меру. Следовательно, множество e, на котором выполняется неравенство (9), имеет конечную логарифмическую меру (функцией $t = \exp(-\tau)$ множество E отображается на множество e и обратно). Теорема 1 доказана.

Основной результат статьи заключен в следующей теореме, где установлена оценка функции $M(r)$ сверху через функцию $\mu(r)$, для класса функций $\varphi(y)$ удовлетворяющих условию (4).

Теорема 2. Пусть ряд (1) имеет радиус сходимости, равный единице и $a_n \geq 0 \forall n$. Пусть функция $\varphi(y)$ удовлетворяет условиям Леммы. Тогда вне, возможно, некоторого множества конечной логарифмической меры справедлива следующая оценка типа Вимана-Валирона:

$$\frac{M(r)}{\sqrt{\varphi\left((1-r)^{-\beta}\log M(r)\right)}} \leq c\frac{\mu(r)}{(1-r)^{\alpha}}. \tag{17}$$

(**Примечание.** Здесь и в дальнейшем c означает абсолютную постоянную, но не всегда одинаковую.)

Доказательство. Обозначим

$$F(t) = f\left(e^{t}\right) = \sum_{n\geq 0} a_n e^{-nt},\ \ F(0) = \infty,\ \ F(1) < \infty.$$

Обозначим $g(t) = \ln F(t)$. Следуя методу работы Розенблюма свяжем с функцией $F(t)$ случайную величину ξ, значениями которой служит множество всех натуральных чисел, с формулой распределения вероятностей (зависящей от параметра t)

$$p_n = P(\xi = n) = a_n e^{-nt}/F(t).$$

Вычислив математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$ находим $M\xi = -g'(t)$, $D\xi = g''(t)$.

В силу неравенства Чебышева $P(|\xi - M\xi| > \varepsilon) \leq \varepsilon^{-2}D\xi$. Выбрав $\varepsilon = c\sqrt{D\xi}$, $c = const > 1$, имеем:

$$1 - \frac{1}{c^2} \leq P\left(\left|\xi + g'\right| \leq \varepsilon\right) = \frac{1}{F(t)}\sum_{n\geq 0} a_n e^{-nt} \leq \frac{\mu\left(e^{-t}\right)}{F(t)}\sum_{n\in I} 1, \tag{18}$$

где $I = \left\{n : |n + g'(t)| \leq c\sqrt{D\xi}\right\}$. Обозначим $P(g', g'') = \sum_{n\in I} 1$, $h = -g'$, тогда $I = \{n : |n - h| \leq \varepsilon\}$.

Таким образом, из (18) получим неравенство вида

$$F(t) \leq c\mu\left(e^{-t}\right) P\left(g', g''\right). \tag{19}$$

Обозначим через $N(\lambda)$ -количество тех n , для которых $n \leq \lambda$. Тогда получим:

$$P\left(g',g''\right)=\sum_{n\leq h+c\sqrt{g''}}1-\sum_{n\leq h-c\sqrt{g''}}1=N\left(h+c\sqrt{g''}\right)-N\left(h-c\sqrt{g''}\right).$$

Эта разность определяет количество тех n , которые заключены в интервале $\left(h-c\sqrt{g''},\ h+c\sqrt{g''}\right)$, которое не больше, чем длина данного интервала, т.е. $2c\sqrt{g''}$. Следовательно, из (19) имеем

$$F\left(t\right)\leq 2c\mu\left(e^{-t}\right)\sqrt{g''\left(t\right)}. \tag{20}$$

В силу теоремы 1 вне множества e, $\int_e\frac{dt}{t}<\infty$, выполнено неравенство (10). Тогда вне множества e имеет место неравенство вида

$$F\left(t\right)\leq c\mu\left(e^{-t}\right)\ t^{-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\varphi\left(t^{-\beta}g\left(t\right)\right)}. \tag{21}$$

Положим здесь $r=e^{-t}$. Так как

$$F\left(\log\frac{1}{r}\right)=f\left(r\right)=\sum a_nr^n=M\left(r\right)=\max_{|z|\leq r}\left|f\left(z\right)\right|,$$

$$g\left(\log\frac{1}{r}\right)=\log F\left(\log\frac{1}{r}\right)=\log M\left(r\right),$$

$$\log\frac{1}{r}\sim 1-r,\ \ r\to 1,$$

то из (21) получим:

$$M\left(r\right)\leq c\mu\left(r\right)\left(\log\frac{1}{r}\right)^{-\alpha}\sqrt{\varphi\left(\left(\log\frac{1}{r}\right)^{-\beta}\log M\left(r\right)\right)}=$$

$$=c\frac{\mu\left(r\right)}{\left(1-r\right)^{\alpha}}\sqrt{\varphi\left(\left(1-r\right)^{-\beta}\log M\left(r\right)\right)}. \tag{22}$$

Теорема доказана.

Пусть $\varphi\left(y\right)=y^k$ $(k>1)$. Тогда из (22) получим оценку вида

$$\frac{M\left(r\right)}{\left[\log M\left(r\right)\right]^{k/2}}\leq c\frac{\mu\left(r\right)}{\left(1-r\right)^{\gamma}},\ \ \gamma=\alpha+\frac{k\beta}{2}.$$

Обозначим $\tilde{\mu}\left(r\right)=c\frac{\mu(r)}{(1-r)^{\gamma}}$. Тогда последняя оценка эквивалентна оценке

$$M\left(r\right)\leq\tilde{\mu}\left(r\right)\left(\log\tilde{\mu}\left(r\right)\right)^{k/2}.$$

При $k=1+2\varepsilon$ получим точную форму оценки Вимана-Валирона, с заменой $\mu\left(r\right)$ на $\tilde{\mu}$. В частности, при $\gamma=1$ получим оценку Ковари, но с исключительном множеством конечной логарифмической меры. Кроме этого в оценках (22) выбор класса функций $\varphi\left(y\right)$ (в отличие от работы Ковари) сравнительно шире.

Список литературы

[1] A. Wiman, Acta Math., Vol. 37, p. 305-326, 1914.

[2] G. Valiron, Bull. Sosiete math., Vol. 41, p. 45-64, 1916.

[3] P.C. Rosenbloom, Probability and entire functions, Studies in Math. anal. and Related topics, Stanford Univ., p. 325-332, 1963 .

[4] Н.М. Сулейманов, Вероятность, целые функции и оценки типа Вимана-Валирона для эволюционных уравнений. Москва. Издательство МГУ, с. 235, 2012.

[5] Н.М. Сулейманов, Д.Е. Фараджли, Об оценках типа Вимана-Валирона для эволюционных уравнений. Дифференциальные уравнения, т. 53, No 8, с. 999-1008, 2017.

[6] Nadir M. Suleymanov, Dunya E. Farajli, Vugar S. Khalilov, Probability method and Wiman-Valiron type estimations for differential equations. Transactions of NAS of Azerbaijan vol. 37, No 4, p. 168-175, 2017.

[7] T. Kovari, On the maximum modulus and maximum term of function analitic in the disc, J. London Math. Soc. 71, 129-137, 1966.

Н.М. Сулейманов
Институт математики и Механики НАН Азербайджана,

Д.Е. Фараджли
Институт математики и Механики НАН Азербайджана,
*Email:*dunya.farajli@mail.ru