Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 8, No 1, 2018, July
ISSN 2222-5498

О корректной разрешимости краевой задачи в неклассической трактовке заданной на середине области для одного интегро-дифференциального уравнения 3D Бианки

И.Г.Мамедов, А.Дж.Абдуллаева

Аннотация. В представленной работе для одного интегро-дифференциального уравнения 3D Бианки классические условия на середине области приведены к неклассическими условиями. Трехмерная краевая задача на середине области в этой постановке более естественна, чем трехмерная краевая задача на середине области в классической постановке. Это связано с тем, что в этой постановке трехмерной краевой задачи на правые части краевых условий никаких дополнительных условий типа согласования не требуются. В данной статье выявлен гомеоморфизм между определенными парами банаховых пространств при исследовании трехмерной краевой задачи заданной на середине области для одного интегро-дифференциального 3D Бианки третьего порядка с L_p- коэффициентами на основе сведения этой задачи к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра.
Ключевые слова: уравнение 3D Бианки, уравнения с разрывными коэффициентами, гомеоморфизм, краевая задача.

1. Введение

Эта работа посвящена корректной разрешимости краевой задачи на середине области для интегро-дифференциальных уравнений 3D Бианки с доминирующей смешанной производной третьего порядка с негладкими коэффициентами. При этом важным принципиальным моментом является то, что рассматриваемое уравнение обладает, негладкими коэффициентами которое удовлетворяют только некоторым условиям типа P-интегрируемости и ограниченности т.е. рассмотренный интегро-дифференциальный оператор не имеет традиционного сопряженного оператора. Поэтому функция Римана для таких уравнений не может быть исследована классическим методом характеристик.

Трехмерные краевые задачи в настоящее время являются интенсивно развивающимся разделом теории дифференциальных уравнений. Теория краевых задач, возникла из-за потребностей современной науки и техники. Проблемы современной науки и техники выдвинули на первый план решение более реальных практических задач, связанных с исследованием разнообразных классов математических моделей. Математическое моделирование многих биологических и технологических процессов приводит к изучению некоторых специальных краевых задач для различных классов дифференциальных уравнений.

К числу нелокальных задач относятся также задачи, связанные с уравнениями "нелокального характера", например, с интегро-дифференциальными если даже краевые условия для них являются локальными.

За последние десятилетие существенно повысился интерес к трехмерным локальным и нелокальным краевым задачам для уравнений Бианки [1-3]. Это связано с их появлением в различных задачах прикладного характера. В работах В.И.Жегалова [4-5] исследовано уравнение с доминирующей смешанной производной $u_{xyz}(x, y, z)$. Такого типа уравнение находит применение в моделях процессов вибрации, а также немаловажное значение имеет в теории аппроксимации. Актуальность исследований, проводимых в этой области, объясняется появлением многомерных локальных и нелокальных задач для уравнений Бианки с негладкими коэффициентами, связанных с различными прикладными задачами. Задачи такого типа возникают, при исследовании вопросов фильтрации жидкости в трещиноватых средах, влагопереносом в грунтах, распространением импульсных лучевых волн, в различных биологических процессах и в теории обратных задач. Поэтому тематика данной работы весьма актуальна для решения многих теоретических и практических задач.

В современной теории дифференциальных уравнений особое значение имеет вопрос о выявлении классов задач, операторы которых осуществляют гомеоморфизм между определенными парами банаховых пространств. Такие гомеоморфизмы выявлены в работах Ю.М.Березанского и Я.А.Ройтберга[6], Ж.-Л. Лионса и Э.Мадженеса [7], С.С.Ахиева [8-9], Н.В.Житарашу [10], В.И.Корзюка [11], И.Г. Мамедова [12-13] и др. для некоторых классов дифференциальных уравнений с частными производными. С этой точки зрения, эта работа посвящена актуальным проблемам математической физики.

2. Постановка задачи.

В этой работе рассматривается трехмерная краевая задача заданной на середине области для интегро-дифференциального уравнения 3D (трехмерного) Бианки с L_p-коэффициентами и доминирующей смешанной производной $u_{xyz}(x, y, z)$.

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

3D Бианки

$$(V_{1,1,1}u)(x,y,z) \equiv u_{xyz}(x,y,z) + A_{0,0,0}u(x,y,z) + A_{1,0,0}u_x(x,y,z) +$$
$$+A_{0,1,0}u_y(x,y,z) + A_{0,0,1}u_z(x,y,z) + A_{1,1,0}u_{xy}(x,y,z) + A_{0,1,1}u_{yz}(x,y,z) +$$

$$+A_{1,0,1}u_{xz}(x,y,z) + \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} [K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)\ u(\tau,\xi,\eta) + K_{1,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z) \times$$

$$\times u_x(\tau,\xi,\eta)+K_{0,1,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)u_y(\tau,\xi,\eta)+K_{0,0,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)\times$$

$$\times u_z(\tau,\xi,\eta)+K_{1,1,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)u_{xy}(\tau,\xi,\eta)+K_{0,1,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)\times$$
$$\times u_{yz}(\tau,\xi,\eta)+K_{1,0,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)u_{xz}(\tau,\xi,\eta)]\,d\tau d\xi d\eta=\varphi_{1,1,1}(x,y,z),$$

$$(x,y,z)\in G, \tag{1}$$

Здесь $u=u(x,y,z)$ искомая функция, определенная на G; $A_{i,j,k}=A_{i,j,k}(x,y,z)$ заданные измеримые функции на $G=G_1\times G_2\times G_3$, где $G_1=(x_0,x_1)$, $G_2=(y_0,y_1)$, $G_3=(z_0,z_1)$; $\varphi_{1,1,1}(x,y,z)$ заданная измеримая функция на G.

Уравнение (1) является гиперболическим уравнением, которое обладает тремя действительными простыми характеристиками $x=const$, $y=const$, $z=const$. Уравнения подобного вида возникают при описании многих реальных процессов, происходящих в природе и технике. Подобные ситуации имеют место при изучении процессов распространения тепла , влагопереноса в почвогрунтах , фильтрации жидкости в пористых средах , в задачах математической биологии , а также в теории оптимальных процессов .

Кроме того, в литературе до сих пор функцию Римана уравнения (1) удалось построить только для случая когда $K_{i,j,k}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)\equiv 0$ а функции $A_{i,j,k}(x,y,z)$ являются достаточно гладкими /т.е. когда функции $A_{i,j,k}(x,y,z)$ непрерывны вместе с производными $D_x^i\,D_y^j\,D_z^k\,A_{i,j,k}(x,y,z)$ в области $\overline{G}$/.

В данной статье уравнение (1) впервые исследовано в общем случае, когда коэффициенты $A_{i,j,k}(x,y,z)$ и $K_{i,j,k}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)$ являются негладкими функциями, удовлетворяющими лишь следующим условиям:

$$\begin{array}{l} A_{0,0,0}(x,y,z)\in L_p(G), A_{1,0,0}(x,y,z)\in L^{x,y,z}_{\infty,p,p}(G), A_{0,1,0}(x,y,z)\in L^{x,y,z}_{p,\infty,p}(G),\\ A_{0,0,1}(x,y,z)\in L^{x,y,z}_{p,p,\infty}(G), A_{1,1,0}(x,y,z)\in L^{x,y,z}_{\infty,\infty,p}(G), A_{0,1,1}(x,y,z)\in L^{x,y,z}_{p,\infty,\infty}(G),\\ A_{1,0,1}(x,y,z)\in L^{x,y,z}_{\infty,p,\infty}(G), K_{i,j,k}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)\in L_\infty(G\times G). \end{array}$$

При этих условиях решение $u(x,y,z)$ уравнения (1) будем искать в пространстве С.Л.Соболева

$$W_p^{(1,1,1)}(G)=\{\,u\in L_p(G)\;/D_x^i\,D_y^j\,D_z^k u\in L_p(G);\;\; i,\; j,\; k=0,\,1\},$$

где $1\le p\le\infty$. Норму в пространстве $W_p^{(1,1,1)}(G)$ будем определять равенством

$$\|u\|_{W_p^{(1,1,1)}(G)}=\sum_{i,j,k=0}^{1}\left\|D_x^iD_y^jD_z^ku\right\|_{L_p(G)}$$

Для уравнения (1) условия на середине области классического вида можно задавать в виде

$$\begin{cases} u/_{x=\frac{x_0+x_1}{2}} = \Phi(y,z), \\ u/_{y=\frac{y_0+y_1}{2}} = \Psi(x,z), \\ u/_{z=\frac{z_0+z_1}{2}} = g(x,y), \end{cases} \qquad (2)$$

где $\Phi(y,z)$, $\Psi(x,z)$ и $g(x,y)$ заданные измеримые функции на G. Очевидно, что в случае условий (2) функции Φ, Ψ, g кроме условий

$$\Phi \in W_p^{(1,1)}(G_2 \times G_3), \qquad \Psi \in W_p^{(1,1)}(G_1 \times G_3), \qquad g \in W_p^{(1,1)}(G_1 \times G_2),$$

должны удовлетворять также следующим условиям:

$$\begin{cases} \Phi(\frac{y_0+y_1}{2}, z) = \Psi(\frac{x_0+x_1}{2}, z), \\ \Phi(y, \frac{z_0+z_1}{2}) = g(\frac{x_0+x_1}{2}, y), \\ \Psi(x, \frac{z_0+z_1}{2}) = g(x, \frac{y_0+y_1}{2}), \end{cases} \qquad (3)$$

которые являются условиями согласования.

Наличие условий согласования в постановке задачи (1), (2) означает, что условиями (2) задана также некоторая излишняя информация о решении этой задачи. Поэтому возникает вопрос о нахождении краевых условий, которые не содержат излишней информации о решении и не требуют выполнения некоторых дополнительных условий типа согласования. В связи с этим рассмотрим следующие краевые условия

$$\begin{cases} V_{0,0,0}u \equiv u(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}, \frac{z_0+z_1}{2}) = \varphi_{0,0,0} \\ (V_{1,0,0}u)(x) \equiv u_x(x, \frac{y_0+y_1}{2}, \frac{z_0+z_1}{2}) = \varphi_{1,0,0}(x), \\ (V_{0,1,0}u)(y) \equiv u_y(\frac{x_0+x_1}{2}, y, \frac{z_0+z_1}{2}) = \varphi_{0,1,0}(y), \\ (V_{0,0,1}u)(z) \equiv u_z(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}, z) = \varphi_{0,0,1}(z), \\ (V_{1,1,0}u)(x,y) \equiv u_{xy}(x, y, \frac{z_0+z_1}{2}) = \varphi_{1,1,0}(x,y), \\ (V_{0,1,1}u)(y,z) \equiv u_{yz}(\frac{x_0+x_1}{2}, y, z) = \varphi_{0,1,1}(y,z), \\ (V_{1,0,1}u)(x,z) \equiv u_{xz}(x, \frac{y_0+y_1}{2}, z) = \varphi_{1,0,1}(x,z), \end{cases} \qquad (4)$$

где $\varphi_{0,0,0} \in R$ является заданным числом, а остальные $\varphi_{i,j,k}$ являются заданными функциями, удовлетворяющими условиям:

$$\varphi_{1,0,0}(x) \in L_p(G_1), \varphi_{0,1,0}(y) \in L_p(G_2), \varphi_{0,0,1}(z) \in L_p(G_3), \varphi_{1,1,0}(x,y) \in L_p(G_1 \times G_2),$$

$$\varphi_{0,1,1}(y,z) \in L_p(G_2 \times G_3), \varphi_{1,0,1}(x,z) \in L_p(G_1 \times G_3).$$

Если функция $u \in W_p^{(1,1,1)}(G)$ является решением задачи с условиями на середине области классического вида (1), (2), то она является также решением задачи (1), (4) для $\varphi_{i,j,k}$ определяемых следующими равенствами

$$
\begin{cases}
\varphi_{0,0,0} = \Phi(\frac{y_0+y_1}{2}, \frac{z_0+z_1}{2}) = \Psi\left(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{z_0+z_1}{2}\right) = g(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}), \\
\varphi_{1,0,0}(x) = \Psi_x\left(x, \frac{z_0+z_1}{2}\right) = g_x(x, \frac{y_0+y_1}{2}), \\
\varphi_{0,1,0}(y) = g_y(\frac{x_0+x_1}{2}, y) = \Phi_y(y, \frac{z_0+z_1}{2}), \\
\varphi_{0,0,1}(z) = \Phi_z(\frac{y_0+y_1}{2}, z) = \Psi_z\left(\frac{x_0+x_1}{2}, z\right), \\
\varphi_{1,1,0}(x,y) = g_{xy}(x,y), \\
\varphi_{0,1,1}(y,z) = \Phi_{yz}(y,z), \\
\varphi_{1,0,1}(x,z) = \Psi_{xz}(x,z),
\end{cases} \tag{5}
$$

Легко доказать, что верно и обратное. Иначе говоря, если функция $u \in W_p^{(1,1,1)}(G)$ является решением задачи (1), (4), то она является также решением задачи (1), (2), для следующих функций Φ, Ψ, g:

$$
\begin{cases}
\Phi(y,z) = \varphi_{0,0,0} + \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} \varphi_{0,1,0}(\beta)d\beta + \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} \varphi_{0,0,1}(\gamma)d\gamma + \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} \varphi_{0,1,1}(\beta,\gamma)d\beta d\gamma, \\
\Psi(x,z) = \varphi_{0,0,0} + \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} \varphi_{1,0,0}(\alpha)d\alpha + \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} \varphi_{0,0,1}(\gamma)d\gamma + \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} \varphi_{1,0,1}(\alpha,\gamma)d\alpha d\gamma, \\
g(x,y) = \varphi_{0,0,0} + \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} \varphi_{1,0,0}(\alpha)d\alpha + \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} \varphi_{0,1,0}(\beta)d\beta + \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} \varphi_{1,1,0}(\alpha,\beta)d\alpha d\beta
\end{cases} \tag{6}
$$

Отметим, что, при этом, функции (6) обладают одним важным свойством, связанным с тем, что для них условия согласования (3) выполняются автоматическим образом при всех $\varphi_{i,j,k}$, обладающих выше указанными свойствами. Поэтому равенства (6) можно рассматривать также как общий вид всех функций

$$
\Phi(y,z) \in W_p^{(1,1)}(G_2 \times G_3), \quad \Psi(x,z) \in W_p^{(1,1)}(G_1 \times G_3), \;\; g(x,y) \in W_p^{(1,1)}(G_1 \times G_2),
$$

удовлетворяющих условиям согласования (3).

Итак, задачи с условиями на середине области классического вида (1), (2) и вида (1), (4) в общем случае эквивалентны. Однако задача (1), (4) по постановке более естественна, чем задача (1), (2). Это связано с тем, что в постановке задачи (1), (4) на правые части краевых условий никаких дополнительных условий типа согласования не требуется. Поэтому задачу (1) , (4) можно рассматривать как задачу с условиями на середине области нового типа.

3. Операторный вид краевой задачи заданной на середине области и некоторые структурные свойства пространства С.Л.Соболева

Задачу (1), (4) мы будем исследовать методом операторных уравнений и при этом будем следовать схемы работы [13]. Предварительно задачу (1) запишем в виде операторного уравнения

$$
Vu = \varphi, \tag{7}
$$

где V есть векторный оператор, определяемый посредством равенства

$V = (V_{0,0,0}, V_{1,0,0}, V_{0,1,0}, V_{0,0,1}, V_{1,1,0}, V_{0,1,1}, V_{1,0,1}, V_{1,1,1}) : W_p^{(1,1,1)}(G) \to \mathrm{E}_p^{(1,1,1)}$ а φ есть заданный векторный элемент вида

$$\varphi = (\varphi_{0,0,0}, \varphi_{1,0,0}, \varphi_{0,1,0}, \varphi_{0,0,1}, \varphi_{1,1,0}, \varphi_{0,1,1}, \varphi_{1,0,1}, \varphi_{1,1,1})$$

из пространства

$$\mathrm{E}_p^{(1,1,1)} \equiv R \times L_p(x_0, x_1) \times L_p(y_0, y_1) \times L_p(z_0, z_1) \times L_p(G_1 \times G_2) \times L_p(G_2 \times G_3) \times$$
$$\times L_p(G_1 \times G_3) \times L_p(G).$$

Заметим, что в пространстве $\mathrm{E}_p^{(1,1,1)}$ норму будем определять естественным образом, при помощи равенства

$$\|\varphi\|_{\mathrm{E}_p^{(1,1,1)}} = \|\varphi_{0,0,0}\|_R + \|\varphi_{1,0,0}\|_{L_p(x_0,x_1)} + \|\varphi_{0,1,0}\|_{L_p(y_0,y_1)} + \|\varphi_{0,0,1}\|_{L_p(z_0,z_1)} +$$
$$+ \|\varphi_{1,1,0}\|_{L_p(G_1\times G_2)} + \|\varphi_{0,1,1}\|_{L_p(G_2\times G_3)} + \|\varphi_{1,0,1}\|_{L_p(G_1\times G_3)} + \|\varphi_{1,1,1}\|_{L_p(G)}.$$

Прежде всего отметим, что интегральные представления функций из пространств типа $W_p^{(1,1,1)}(G)$ (из соболевских пространств с доминирующими смешанными производными общего вида) изучены в работах Т.И. Аманова [14], С.М. Никольского [15], П.И. Лизоркина и С.М. Никольского [16], О.В. Бесова, В.П. Ильина и С.М. Никольского [17], А.Д. Джабраилова [18], С.С.Ахиева [19], А.М.Наджафова [20], И.Г.Мамедова [21] и др. Но из них мы будем использовать модифицированное интегральное представление из [19], по которому любая функция $u(x,y,z) \in W_p^{(1,1,1)}(G)$ единственным образом представима в виде

$$u(x,y,z) = (Qb)(x,y,z) \equiv b_{0,0,0} + \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} b_{1,0,0}(\alpha)d\alpha +$$
$$+ \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} b_{0,1,0}(\beta)d\beta + \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} b_{0,0,1}(\gamma)d\gamma +$$
$$+ \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} b_{1,1,0}(\alpha,\beta)d\alpha d\beta + \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} b_{0,1,1}(\beta,\gamma)d\beta d\gamma +$$
$$+ \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} b_{1,0,1}(\alpha,\gamma)d\alpha d\gamma +$$
$$+ \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} b_{1,1,1}(\alpha,\beta,\gamma)d\alpha d\beta d\gamma \tag{8}$$

посредством единственного элемента

$$b = (b_{0,0,0}, b_{1,0,0}, b_{0,1,0}, b_{0,0,1}, b_{1,1,0}, b_{0,1,1}, b_{1,0,1}, b_{1,1,1}) \in \mathrm{E}_p^{(1,1,1)}.$$

При этом существуют положительные постоянные M_1^0 и M_2^0 такие, что

$$M_1^0 \|b\|_{\mathrm{E}_p^{(1,1,1)}} \leq \|Qb)(x,y,z)\|_{W_p^{(1,1,1)}(G)} \leq M_2^0 \|b\|_{\mathrm{E}_p^{(1,1,1)}}, \text{ для любой } b \in \mathrm{E}_p^{(1,1,1)} \quad (9)$$

Очевидно, что оператор $Q : \mathrm{E}_p^{(1,1,1)} \to W_p^{(1,1,1)}(G)$ является линейным ограниченным оператором. Неравенство (9) показывает, что оператор Q имеет также ограниченный обратный оператор определенную на пространстве $W_p^{(1,1,1)}(G)$. Следовательно оператор Q есть гомеоморфизм между банаховыми пространствами $\mathrm{E}_p^{(1,1,1)}$ и $W_p^{(1,1,1)}(G)$. Поэтому решение уравнения (7) эквивалентно решению уравнения

$$VQb = \varphi \quad (10)$$

Уравнение (10) будем называть каноническим видом уравнения (7).

Кроме того, формула (8) показывает, что любая функция $u \in W_p^{(1,1,1)}(G)$ имеет следы :

$$u(\tfrac{x_0+x_1}{2}, \tfrac{y_0+y_1}{2}, \tfrac{z_0+z_1}{2}), u_x(x, \tfrac{y_0+y_1}{2}, \tfrac{z_0+z_1}{2}), u_y(\tfrac{x_0+x_1}{2}, y, \tfrac{z_0+z_1}{2}),$$
$$u_z(\tfrac{x_0+x_1}{2}, \tfrac{y_0+y_1}{2}, z), u_{xy}(x, y, \tfrac{z_0+z_1}{2}), u_{yz}(\tfrac{x_0+x_1}{2}, y, z), u_{xz}(x, \tfrac{y_0+y_1}{2}, z)$$

и операции взятия этих следов непрерывны из $W_p^{(1,1,1)}(G)$ в R,

$$L_p(x_0,x_1), \quad L_p(y_0,y_1),\ L_p(z_0,z_1),\ L_p(G_1\times G_2),\ L_p(G_2\times G_3),\ L_p(G_1\times G_3)$$

соответственно. Далее для этих следов справедливы также равенства:

$$u(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}, \frac{z_0+z_1}{2}) = b_{0,0,0}, \quad u_x(x, \frac{y_0+y_1}{2}, \frac{z_0+z_1}{2}) = b_{1,0,0}(x),$$

$$u_y(\frac{x_0+x_1}{2}, y, \frac{z_0+z_1}{2}) = b_{0,1,0}(y), \qquad u_z(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}, z) = b_{0,0,1}(z),$$

$$u_{xy}(x,y,\frac{z_0+z_1}{2}) = b_{1,1,0}(x,y), \quad u_{yz}(\frac{x_0+x_1}{2}, y, z) = b_{0,1,1}(y,z),$$

$$u_{xz}(x, \frac{y_0+y_1}{2}, z) = b_{1,0,1}(x,z).$$

4. Эквивалентное интегральное уравнение для краевой задачи

Задачу (1), (4) мы будем изучать при помощи интегрального представления (8) функций $u \in W_p^{(1,1,1)}(G)$. Формула (8) показывает, что функция $u \in W_p^{(1,1,1)}(G)$, удовлетворяющая условиям (4), имеет вид:

$$u(x,y,z)=g_0(x,y,z)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1}u_{xyz}(\alpha,\beta,\gamma)R_0(\alpha,\beta,\gamma;x,y,z)d\alpha d\beta d\gamma,$$

где

$$g_0(x,y,z)=\varphi_{0,0,0}+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\varphi_{1,0,0}(\alpha)d\alpha+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\varphi_{0,1,0}(\beta)d\beta+\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}\varphi_{0,0,1}(\gamma)d\gamma+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\varphi_{1,1,0}(\alpha,\beta)d\alpha d\beta+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}\varphi_{0,1,1}(\beta,\gamma)d\beta d\gamma+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}\varphi_{1,0,1}(\alpha,\gamma)d\alpha d\gamma$$

и

$$R_0(\alpha,\beta,\gamma;x,y,z)=\theta(x-\alpha)\theta(y-\beta)\theta(z-\gamma),$$

причем $\theta(z)$ является функцией Хэвисайда на R, т.е. $\theta(z)=\begin{cases}1, z>0\\ 0, z\le 0\end{cases}$. Тогда после замены $u=g_0+\hat{u}$, где

$$\hat{u}(x,\,y,\,z)=\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1}R_0(\alpha,\beta,\gamma;x,y,z)u_{xyz}(\alpha,\beta,\gamma)d\alpha d\beta d\gamma,$$

уравнение (1) можно записать в виде

$$(V_{1,1,1}\hat{u})(x,y,z)=\hat{Z}(x,y,z), \tag{11}$$

где $\hat{Z}=\varphi_{1,1,1}-V_{1,1,1}g_0$.

Очевидно, что производные функции $\hat{u}$ можно вычислить посредством равенств

$$\hat{u}_x(x,y,z)=\textstyle\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}u_{xyz}(x,\beta,\gamma)d\beta d\gamma,\quad \hat{u}_y(x,y,z)=\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}u_{xyz}(\alpha,y,\gamma)d\alpha d\gamma,$$

$$\hat{u}_z(x,y,z)=\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}u_{xyz}(\alpha,\beta,z)d\alpha d\beta,\quad \hat{u}_{xy}(x,y,z)=\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}u_{xyz}(x,y,\gamma)d\gamma,$$

$$\hat{u}_{yz}(x,y,z)=\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}u_{xyz}(\alpha,y,z)d\alpha,\quad \hat{u}_{xz}(x,y,z)=$$

$$=\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}u_{xyz}(x,\beta,z)d\beta,\ \ \hat{u}_{xyz}(x,y,z)=u_{xyz}(x,y,z).$$

Теперь доминирующую производную рассмотрим как неизвестную функцию, иначе говоря, произведем замену $u_{xyz}(x,y,z) = b(x,y,z)$. Тогда уравнение (11) можно записать в виде:

$$(Nb)(x,y,z) \equiv b(x,y,z)+$$
$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} A_{0,0,0}(x,y,z)R_0(\alpha,\beta,\gamma;x,y,z)b(\alpha,\beta,\gamma)d\alpha d\beta d\gamma+$$
$$+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} A_{1,0,0}(x,y,z)b(x,\beta,\gamma)d\beta d\gamma+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} A_{0,1,0}(x,y,z)b(\alpha,y,\gamma)d\alpha d\gamma+$$
$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} A_{0,0,1}(x,y,z)b(\alpha,\beta,z)d\alpha d\beta+$$
$$+\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} A_{1,1,0}(x,y,z)b(x,y,\gamma)d\gamma+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} A_{0,1,1}(x,y,z)b(\alpha,y,z)d\alpha+$$
$$+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} A_{1,0,1}(x,y,z)b(x,\beta,z)d\beta+$$
$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}\Bigg[\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\tau}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\xi}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\eta} K_{0,0,0}\,(\tau,\xi,\eta;x,y,z)R_0(\alpha,\beta,\gamma;x,y,z)\times$$
$$\times b(\alpha,\beta,\gamma)d\alpha d\beta d\gamma+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\xi}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\eta} K_{1,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)b(\tau,\beta,\gamma)d\beta d\gamma+$$
$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\tau}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\eta} K_{0,1,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)b(\alpha,\xi,\gamma)d\alpha d\gamma+$$
$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\tau}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\xi} K_{0,0,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)b(\alpha,\beta,\eta)\times$$
$$\times d\alpha d\beta+\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\eta} K_{1,1,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)b(\tau,\xi,\gamma)d\gamma+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\tau} K_{0,1,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)b(\alpha,\xi,\eta)d\alpha+$$
$$+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\eta} K_{1,0,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z))b(\tau,\beta,\eta)d\beta\Bigg]d\tau d\xi d\eta=\hat{Z}(x,y,z),\quad (x,y,z)\in G, \qquad (12)$$

Оператор N уравнения (12) линеен. Используя условия, наложенные на коэффициенты $A_{i,j,k}$, можно доказать, что этот оператор является ограниченным оператором из $L_p(G)$ в $L_p(G)$, $1 \le p \le \infty$.

Определение . Если задача (1), (4) для любого

$$\varphi = (\varphi_{0,0,0},\varphi_{1,0,0},\varphi_{0,1,0},\varphi_{0,0,1},\varphi_{1,1,0},\varphi_{0,1,1},\varphi_{1,0,1},\varphi_{1,1,1}) \in \mathrm{E}_p^{(1,1,1)}$$

имеет единственное решение $u \in W_p^{(1,1,1)}(G)$ такое, что

$$\|u\|_{W_p^{(1,1,1)}(G)} \leq M_1 \|\varphi\|_{\mathrm{E}_p^{(1,1,1)}},$$

то будем говорить, что оператор V задачи (1), (4) (или уравнения (7)) является гомеоморфизмом из $W_p^{(1,1,1)}(G)$ на $\mathrm{E}_p^{(1,1,1)}$или задача (1), (4) везде корректно разрешима. Здесь M_1 постоянная не зависящее от φ.

Очевидно, что, если оператор V задачи (1), (4) является гомеоморфизмом из $W_p^{(1,1,1)}(G)$ на $\mathrm{E}_p^{(1,1,1)}$, то существует ограниченный обратный оператор:

$$V^{-1} : \mathrm{E}_p^{(1,1,1)} \to W_p^{(1,1,1)}(G).$$

Оператор N является вольтерровым оператором относительно точки $(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}, \frac{z_0+z_1}{2})$. Это означает, что если функции $b_1, b_2 \in L_p(G)$ в области

$$G_{(x,y,z)} = (\frac{x_0+x_1}{2}, x) \times (\frac{y_0+y_1}{2}, y) \times (\frac{z_0+z_1}{2}, z)$$

удовлетворяют условию

$$b_1(\alpha, \beta, \gamma) = b_2(\alpha, \beta, \gamma),$$

то выполняется также условие

$$(Nb_1)(\alpha, \beta, \gamma) = (Nb_2)(\alpha, \beta, \gamma)$$

почти для всех $(\alpha, \beta, \gamma) \in G_{(x,y,z)}$, где $(x, y, z) \in G$ произвольная точка.

Используя вольтерровость оператора N, при помощи, например, метода последовательных приближений можно доказать, что уравнение (12) для любой правой части $\hat{Z} \in L_p(G)$ имеет единственное решение $b \in L_p(G)$, где $1 \leq p \leq \infty$, и это решение удовлетворяет условию

$$\|b\|_{L_p(G)} \leq M_2 \left\|\hat{Z}\right\|_{L_p(G)},$$

где M_2 постоянное не зависящее от $\hat{Z}$. Далее, очевидно, что если $\varphi_{1,1,1} \in L_p(G)$, то $\hat{Z} \in L_p(G)$. Кроме того, если $b \in L_p(G)$ есть решение уравнения (12), то решение задачи (1), (4) можно найти при помощи равенства

$$u\,(x, y, z) = g_0(x, y, z) + \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} b(\alpha, \beta, \gamma) R_0(\alpha, \beta, \gamma; x, y, z) d\alpha d\beta d\gamma.$$

Поэтому справедлива

Теорема. Оператор задачи (1), (4) есть гомеоморфизмом из $W_p^{(1,1,1)}(G)$ на $\mathrm{E}_p^{(1,1,1)}$.

Список литературы

[1] Уткина Е.А. Задача со смещениями для трехмерного уравнения Бианки // Дифференциальные уравнения,2010,Т.46, No.4, С.535-539.

[2] Миронов А.Н. Некоторые классы уравнений Бианки третьего порядка//Математические заметки, 2013, Т.94, вып.3,с.389-400.

[3] Миронов А.Н. Задача Дарбу для уравнения Бианки третьего порядка //Математические заметки, 2017, Т.102, вып.1,с.63-70.

[4] Жегалов В. И. Трехмерный аналог задачи Гурса// Неклассич. уравнения и уравнения смешан. типа, Ин-т матем. СО АН СССР, Новосибирск, 1990, 94–98.

[5] Жегалов В. И. О трехмерной функции Римана // Сиб. матем. журн., 36:5 (1997), 1074–1079.

[6] Березанский Ю.М., Ройтберг Я.А. Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач// Укр. Мат. Жур., 1967, Т.19, No.5, с.3-32.

[7] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения // М.: Мир, 1971, 372с.

[8] Ахиев С.С. Фундаментальные решения некоторых локальных и нелокальных краевых задач и их представления // ДАН СССР, 1983, Т.271, No.2, с.265-269.

[9] Ахиев С.С. Функция Римана уравнения с доминирующей смешанной производной произвольного порядка // ДАН СССР, 1985, Т.283, No.4, с.783-787.

[10] Житарашу Н.В. Теорема о полном наборе изоморфизмов в L_2-теории модельных начальных параболических краевых задач // Мат. Исслед.,Кишинев,1986, No.88, с.40-59.

[11] Корзюк В.И. Граничная задача для уравнения Манжерона третьего порядка // Дифференц. Уравнения, 1997, Т.33, No.12, с.1683-1690.

[12] Мамедов И.Г. Фундаментальное решение задачи Коши, связанной с псевдопараболическим уравнением четвертого порядка // Журнал вычислительной математики и математической физики, Москва, 2009, том 49, No. 1, с.99-110.

[13] Мамедов И.Г. Формула интегрирования по частям неклассического типа при исследовании задачи Гурса для одного псевдопараболического уравнения // Владикавказский. математический журнал, 2011, том 13, No. 4, с. 40–51.

[14] Аманов Т. И. Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной //Наука, Алма-Ата, 1976, 171 с.

[15] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения // Наука, М., 1969, 455 с.

[16] Лизоркин П. И., Никольский С. М. Классификация дифференцируемых функций на основе пространств с доминирующей производной// Труды МИАН СССР, 77, 1965, 143–167.

[17] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения// Наука, М., 1975, 480 с.

[18] Джабраилов А. Дж. О некоторых функциональных пространствах. Прямые и обратные теоремы вложения// Докл. АН СССР, 159 (1964), 254–257.

[19] Ахиев С. С. Об общем виде линейных ограниченных функционалов в одном функциональном пространстве типа С. Л. Соболева // Докл. АН. Азерб. ССР, 35:6 (1976), 3–7.

[20] Наджафов А. М. Об интегральных представлениях функций из пространств с доминирующей смешанной производной // Вестник БГУ. Сер. физ.-мат. наук, 3 (2005), 31–39.

[21] Мамедов И. Г. Об одном разложении для непрерывной функции многих переменных // Вестник БГУ. Сер. физ.-мат. наук, 3 (1999), 144–152.

Мамедов И.Г.
Институт Систем Управления НАН Азербайджана,
*Email:*ilgar-mamedov-1971@mail.ru

Абдуллаева А.Дж.
Сумгаитский Государственный Университет,
*Email:*aynure_13@mail.ru