Journal of Contemporary Applied Mathematics
V. 9, No 2, 2019, December
ISSN 2222-5498

Об индексе дефекте системы одного многопараметрического матричного уравнения типа Штурма-Лиувилля

М.С. Алмамедов

Аннотация. Цель настоящей работы – установить, при каких условиях существует тензорное произведение отдельных нетривиальных решений системы уравнений (1), принадлежащих пространству $L^2(J_b, Q(x)dx)$ и дать оценку числа таких тензорных произведений.

Ключевые слова: Индекс дефекта, многопараметрическая система, тензорное произведение, матричный круг, предельная точка, предельный круг.

2010 Mathematics Subject Classifications: 34G10, 34B24, 34L05

При фиксированном значении индекса $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ рассмотрим многопараметрическое дифференциальное уравнение

$$-y_j''(x_j) + p_j(x_j)\, y_j(x_j) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k Q_{jk}(x_j)\, y_j(x_j) = 0 \tag{1}$$

где $0 \le x_j < \infty$,$\lambda_k = (\rho_1)_k + (\rho_2)_k$и$y_j(x_j)$вектор функция с r_j компонентами.$P_j(x_j)$и$Q_{jk}(x_j)$ квадратные матрицы r_j-го порядка и при этом

$$P_j(x_j) = R_j(x_j) + iT_j(x_j)\,,\ R_j = R_j^*,\ T_j = T_j^*,$$

$$Q_{jk}(x_j) = A_{jk}(x_j) + iB_{jk}(x_j)\,,\ A_{jk} = A_{jk}^*,\ B_{jk} = B_{jk}^*,$$

непрерывные матрицы –функции на полуоси $[0, \infty)$.

Мы хотим ввести аналоги окружностей и кругов Г.Вейля для уравнения (1) с многопараметрами. Классическая теория Г.Вейля о предельной точке и предельной окружности для операторов Штурма-Лиувилля с вещественными потенциалами (см. [1], [2]) распространяется также на случай комплексных потенциалов, как это было замечено В.Б.Лидским и Г.А.Исаевым (см. [3], [4]) в ходе построения теории несамосопряженных операторов Штурма-Лиувилля с дискретным спектром.

Через $y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_n$ обозначим тензорное произведение векторов $y_1(x_1, \lambda), y_2(x_2, \lambda), \ldots, y_n(x_n, \lambda)$ из $c^{r_1}, c^{r_2}, \ldots, c^{r_n}$ соответственно, оно является $(r_1 \times r_2 \times \cdots \times r_n)-$ компонентным вектором зависящим от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Тензорное произведения нетривиальных решений систем уравнений (1) принадлежащих к пространству $L^2\left(J_b, Q(x)dx\right)$, т.е. удовлетворяющих условию

$$\int_{J_b} Q(x)\left|y_1\left(x_1,\lambda\right)\otimes y_2\left(x_2,\lambda\right)\otimes\cdots\otimes y_n\left(x_n,\lambda\right)\right|^2 dx<\infty$$

являются собственной функцией задачи (1).

Число таких линейно-независимых тензорных произведений называется индексом дефекта многопараметрической системы (1).

Здесь $J_b=[0,\infty)\times\cdots\times[0,\infty)$ и

$$Q(x)=A(x)+B(x); A(x)=\det\left\{\left\|\left(\rho_2\right)_k A_{jk}^t\left(x_j\right)\right\|\right\}_{j,k=1}^n>0,$$

$$B(x)=\det\left\{\left\|\left(\rho_1\right)_k B_{jk}^t\left(x_j\right)\right\|\right\}_{j,k=1}^n>0$$

где A_{jk}^t и B_{jk}^t тензорно индуцированный оператор в $c^{r_1\times\cdots\times r_n}$ соответствующий матрице $A_{jk}(x_j)$ и $B_{jk}(x_j)$, т.е.
$A_{jk}^t=I_1\otimes\cdots\otimes I_{j-1}\otimes A_{jk}\otimes I_{j+1}\otimes\cdots\otimes I_n$ и

$$B_{jk}^t=I_1\otimes\cdots\otimes I_{j-1}\otimes B_{jk}\otimes I_{j+1}\otimes\cdots\otimes I_n.$$

В дальнейшем будем считать, что

$$\inf\det\left\|y_j^*\left(x_j\right)\left(\left(\rho_2\right)_k A_{jk}\left(x_j\right)+\left(\rho_1\right)_k B_{jk}\left(x_j\right)\right)y_j\left(x_j\right)\right\|_{j,k=1}^n>0.$$

Цель настоящей работы-установить, при каких условиях существует тензорное произведение отдельных нетривиальных решений системы уравнений (1), принадлежащих пространству $L^2\left(J_b, Q(x)dx\right)$ и дать оценку числу таких тензорных произведений.

Посредством матричных неравенств определим следующие подмножества C^n

$$\Lambda_j^+=\left\{\lambda\in C^n; T_j\left(x_j\right)+\sum_{k=1}^n\left[\left(\rho_2\right)_k A_{jk}\left(x_j\right)+\left(\rho_1\right)_k B_{jk}\left(x_j\right)\right]>0\right\},\ x\in[0,\infty),$$

$$\Lambda_j^-=\left\{\lambda\in C^n; T_j\left(x_j\right)+\sum_{k=1}^n\left[\left(\rho_2\right)_k A_{jk}\left(x_j\right)+\left(\rho_1\right)_k B_{jk}\left(x_j\right)\right]<0\right\},\ x\in[0,\infty).$$

Отметим, что $\Lambda=\bigcap_{j=1}^n\left(\Lambda_j^+\bigcup\Lambda_j^-\right)$ есть открытое множество. Эти подмножества из C^n будет играть роль верхней и нижнем полуплоскостей однопараметрического случая.

Существуют матриц-функции, $G_j\left(x_j,\lambda\right)$ и $\theta_j\left(x_j,\lambda\right)$ решений уравнения системы (1) удовлетворяющей следующим начальным условиям в фиксированном точке $c_j\in(a_j,b_j)$:

$$G_j\left(c_j,\lambda\right)=E_{r_j},\quad G_j'\left(c_j,\lambda\right)=0,$$

$$\theta_j(c_j,\lambda)=0,\quad \theta'_j(c_j,\lambda)=E_{r_j},\quad \lambda\in\Lambda \tag{2}$$

и для матричной функции

$$\Psi_j(x_j,\lambda,l_j)=\theta_j(x_j,\lambda)+G_j(x_j,\lambda)\,l_j \tag{3}$$

справедливо равенство

$$\int_{c_j}^{x_j}\Psi_j^*(\xi_j,\lambda,l_j)\,S_j(\xi_j,\lambda)\,\Psi_j(\xi_j,\lambda,l_j)\,d\xi_j=Jml+F(x_j,\lambda,l_j) \tag{4}$$

где $S_j(\xi_j,\lambda)=T_j(\xi_j)+\sum_{k=1}^n\left[(\rho_2)_k A_{jk}(\xi_j)+(\rho_1)_k B_{jk}(\xi_j)\right].$

Здесь l и l_j постоянная квадратная матрица порядка r_j и

$$F(x_j,\lambda,l_j)=M_0+Ml_j+l_j^*M_1+l_j^*M_2l_j.$$

Теперь найдем явный вид l, M_0, M, M_1 и M_2.

Пусть $y_j(x_j,\lambda)$ есть произвольное матричное решение уравнения (1). Тогда имеем

$$-y_j^*(x_j,\lambda)\,y''_j(x_j,\lambda)+y_j^*(x_j,\lambda)\left[p_j(x_j)+\sum_{k=1}^n\lambda_kQ_{jk}(x_j)\right]y_j(x_j,\lambda)=0.$$

Отсюда

$$\int_{c_j}^{x_j}y_j^*(\xi_j,\lambda)\,y''_j(\xi_j,\lambda)\,d\xi_j=\int_{c_j}^{x_j}y_j^*(\xi_j,\lambda)\left[p_j(\xi_j)+\sum_{k=1}^n\lambda_kQ_{jk}(\xi_j)\right]y_j(\xi_j,\lambda)\,d\xi_j,$$

или

$$y_j^*(\xi_j,\lambda)\,y'_j(\xi_j,\lambda)\int_{c_j}^{x_j}-\left|\left(y_j^*(\xi_j,\lambda)\right)'(y_j(\xi_j,\lambda))\right|_{c_j}^{x_j}+\int_{c_j}^{x_j}y_j(\xi_j,\lambda)\left[y_j^*(\xi_j,\lambda)\right]''d\xi_j=$$

$$=\int_{c_j}^{x_j}y_j^*(\xi_j,\lambda)\left[p_j(\xi_j)+\sum_{k=1}^n\lambda_kQ_{jk}(\xi_j)\right]y_j(\xi_j,\lambda)\,d\xi_j.$$

Выделяя мнимую часть, получим

$$\int_{c_j}^{x_j}y_j^*(\xi_j,\lambda)\,S_j(\xi_j,\lambda)\,y_j(\xi_j,\lambda)\,d\xi_j=$$

$$=\frac{1}{2i}Jm\left[y_j^*(x_j,\lambda)\,y'_j(x_j,\lambda)-\left(y_j^*(c_j,\lambda)\right)'y_j(c_j,\lambda)\right]=\frac{1}{2i}W\left[y_j^*,y_j\right]\Big|_{c_j}^{x_j}.$$

Другими словами, имеет место соотношение

$$2i\int_{c_j}^{x_j}y_j^*s_jy_jd\xi_j=W\left[y_j^*,y_j\right]\big|_{c_j}^{x_j} \tag{5}$$

Напишем соотношение (5) для матричной функции $\Psi_j(x_j,\lambda,l_j) = \theta_j(x_j,\lambda) + G_j(x_j,\lambda)\, l_j$ получаем:

$$2i\int_{c_j}^{x_j} \Psi_j^*(\xi_j,\lambda,l_j)\, S_j(\xi_j,\lambda)\, \Psi_j(\xi_j,\lambda,l_j)\, d\xi_j =$$

$$= W\left[\Psi_j^*, \Psi_j\right](x_j) - W\left[\Psi_j^*, \Psi_j\right](c_j). \qquad (6)$$

Учитывая условие (2) в (6) получим:

$$W\left[\Psi_j^*, \Psi_j\right](c_j) = \Psi_j^*(c_j,\lambda,l_j)\, \Psi_j'(c_j,\lambda,l_j) - \left(\Psi_j^*(c_j,\lambda,l_j)\right)'\Psi_{j_k}'(c_j,\lambda,l_j) =$$

$$= \left[\theta_j^*(c_j,\lambda) + G_j^*(c_j,\lambda)\cdot l_j^*\right]\cdot\left[\theta_j'(c_j,\lambda) + G_j'(c_j,\lambda)\, l_j\right] - \left(\left[\theta_j^*(c_j,\lambda)\right]' + \right.$$

$$\left. + \left(G_j^*(c_j,\lambda)\right)' l_j\right)\left(\theta(c_j,\lambda) + G_j(c_j,\lambda)\, l_j\right) = E_{r_j} l_j^* E_{r_j} - E_{r_j}E_{r_j} l_j = l_j^* - l_j.$$

Следовательно$l = l_j^* - l_j$, и

$$W\left[\Psi_j^*\Psi_j\right](x_j) = \left(\Psi_j^*\Psi_j' - \left(\Psi_j^*\right)'\cdot\Psi_j\right)(x_j) = \left[\theta_j^* + l_j^*\cdot G_j^*\right]\cdot$$

$$\left[\theta_j' + G_j' l_j\right](x_j) - \left[\left(\theta_j^*\right)' + l_j^*\left(G_j^*\right)'\right]\cdot\left[\theta_j + G_j l_j\right](x_j) =$$

$$= \left[\theta_j^*\cdot\theta_j' - \left(\theta_j^*\right)'\cdot\theta_j\right](x_j) + \left[\theta_j^*\cdot G_j' - \left(\theta_j^*\right)'\cdot G_j\right](x_j)\cdot l_j +$$

$$+ l_j^*\left[\theta_j' G_j^* - \left(G_j^*\right)'\cdot\theta_j\right](x_j) + l_j^*\left[G_j^* G_j' - \left(G_j^*\right)'\cdot G_j\right](x_j)\cdot l_j =$$

$$= M_0 + M l_j + l_j^* M_1 + l_j^* M_2 l_j = F(x_j,\lambda,l_j),$$

где M_0, M, M_1, M_2 соответственно равны

$$M_0 = \frac{1}{2i}\begin{vmatrix} \theta_j^* & \left(\theta_j^*\right)' \\ \theta_j & \theta_j' \end{vmatrix}, M = \frac{1}{2i}\begin{vmatrix} \theta_j^* & \left(\theta_j^*\right)' \\ G_j & G_j' \end{vmatrix},$$

$$M_1 = \frac{1}{2i}\begin{vmatrix} G_j^* & \left(G_j^*\right)' \\ \theta_j & \theta_j' \end{vmatrix}, M_2 = \frac{1}{2i}\begin{vmatrix} G_j^* & \left(G_j^*\right)' \\ G_j & G_j' \end{vmatrix}.$$

Через $L_{x_j,\lambda}-$ обозначим множество квадратных матриц l_j порядка $r_j \times r_j$ таких, что

$$F(x_j,\lambda,l_j) \le 0 \qquad (7)$$

Множество $L_{x_j,\lambda}-$ назовем матричным кругом для системы уравнений (1) с центром в точке

$$O_{b_j}(\lambda) = W\left[\theta_j, G_j\right]\Big|_{x_j=b_j}\left(2i\int_{c_j}^{b_j} G_j^*(x_j,\lambda)\, S_j(x_j,\lambda)\, G_j(x_j,\lambda)\, dx_j\right)^{-1} \qquad (8)$$

и с радиусом, равным

$$R_{b_j}(\lambda)=\frac{1}{2}\left(\left|\int_{c_j}^{b_j} G_j^*(x_j,\lambda)\, S_j(x_j,\lambda)\, G_j(x_j,\lambda)\, dx_j\right)^{-1}. \tag{9}$$

Таким образом, матрица l_j принадлежит множеству $L_{x_j,\lambda}$ тогда и только тогда, когда l_j лежит на матричной окружности $c_{b_j}(\lambda)$:

$$\int_{c_j}^{x_j} \Psi_j^*(\xi_j,\lambda,l_j)\, S_j(\xi_j,\lambda)\, \Psi_j(\xi_j,\lambda,l_j)\, d\xi_j \le Jml. \tag{10}$$

Пусть $\lambda\in\Lambda_j^+$. Тогда $S_j(\xi_j,\lambda)>0$ и если $l_j\in L_{x_j,\lambda}$,то $l_j\in L_{x_j',\lambda}$,при $x_j'<x_j$, т.е. $L_{x_j,\lambda}<L_{x_j',\lambda}$.

Другими словами, семейство $L_{x_j,\lambda}$ монотонно убывает.

Действительно, имеем $F(x_j,\lambda,l_j)\le 0$ а также

$$F\left(x_j',\lambda,l_j\right)\le \int_{c_j}^{x_j'} \Psi_j^*(\xi_j,\lambda,l_j)\, S_j(\xi_j,\lambda)\, \Psi_j(\xi_j,\lambda,l_j)\, d\xi_j - Jml <$$

$$< \int_{c_j}^{x_j} \Psi_j^*(\xi_j,\lambda,l_j)\, S_j(\xi_j,\lambda)\, \Psi_j(\xi_j,\lambda,l_j)\, d\xi_j - Jml = F(x_j,\lambda,l_j).$$

Введем обозначение $\bigcap_{b_j>x_j>c_j} L_{x_j,\lambda}=L$.

Тогда если $l_j\in L$, то

$$\int_{c_j}^{x_j} \Psi_j^*(\xi_j,\lambda,l_j)\, S_j(\xi_j,\lambda)\, \Psi_j(\xi_j,\lambda,l_j)\, d\xi_j \le Jml \tag{11}$$

и наоборот, если выполнено (11), то $l_j\in L$ (предельный матричный круг).

Тогда $\lambda\in\Lambda_j^-$ семейство матриц l_j удовлетворяющих условию $F(x_j,\lambda,l_j)\ge 0$, представляет собой матричный круг:

$$(-M_0)+(-M)\,l_j+l_j^*(-M_1)+l_j^*(-M_2)\,l_j\le 0,$$

$$-M_2<0,\quad -M_0<0.$$

Итак, пусть $\lambda\in\Lambda_j^-$. Тогда $S_j(\xi_j,\lambda)<0$ и

$$\int_{c_j}^{x_j} \Psi_j^*(\xi_j,\lambda,l_j)\, S_j(\xi_j,\lambda)\, \Psi_j(\xi_j,\lambda,l_j)\, d\xi_j = Jml + F(x_j,\lambda,l_j). \tag{12}$$

Через $\tilde{L}_{x_j,\lambda}$ обозначим матричный круг

$$F(x_j,\lambda,l_j)\ge 0. \tag{13}$$

Теперь докажем что, операторы M_0 и M_2 являются строго положительными, т.е. при$x\ne 0$,то $(M_0x,x)>0$ и $(M_2x,x)>0$.

Для этого сначала рассмотрим

$$-Z_j^* J Z_j = \left\| \begin{array}{cc} G^* & (G')^* \\ \theta^* & (\theta')^* \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cc} 0 & iE \\ -iE & 0 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cc} G & \theta \\ G' & \theta' \end{array} \right\| =$$

$$= - \left\| \begin{array}{cc} i\left[G^* G' - (G')^* G\right] & i\left[G^* \theta' - (G')^* \theta\right] \\ i\left[\theta^* G' - (\theta')^* G\right] & i\left[\theta^* \theta' - (\theta')^* \theta\right] \end{array} \right\| =$$

$$= 2 \cdot \left\| \begin{array}{cc} \frac{G^* G' - (G')^* G}{2i} & \frac{G^* \theta' - (G')^* \theta}{2i} \\ \frac{\theta^* G' - (\theta')^* G}{2i} & \frac{\theta^* \theta' - (\theta')^* \theta}{2i} \end{array} \right\| = 2 \left\| \begin{array}{cc} M_2 & M_1 \\ M & M_0 \end{array} \right\|$$

Здесь при $\lambda \in \Lambda_j^+$ имеем$J + Z_j^* J Z_j > 0$ или

$$\left\langle J \left\| \begin{array}{c} x \\ 0 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} x \\ 0 \end{array} \right\| \right\rangle + 2 \left\langle \left\| \begin{array}{cc} M_2 & M_1 \\ M & M_0 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} x \\ 0 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{c} x \\ 0 \end{array} \right\| \right\rangle 0.$$

Далее

$$\left\langle J \left\| \begin{array}{c} 0 \\ ix \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{c} x \\ 0 \end{array} \right\| \right\rangle + 2 \left\langle \left\| \begin{array}{c} M_2 x \\ M x \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{c} x \\ 0 \end{array} \right\| \right\rangle 2\left(M_2 x, x\right) > 0$$

$$\left\langle J \left\| \begin{array}{c} 0 \\ y \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{c} 0 \\ y \end{array} \right\| \right\rangle + 2 \left\langle \left\| \begin{array}{cc} M_2 & M_1 \\ M & M_0 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{c} 0 \\ y \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{c} 0 \\ y \end{array} \right\| \right\rangle = \left\langle \left\| \begin{array}{c} iy \\ 0 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{c} 0 \\ y \end{array} \right\| \right\rangle =$$

$$= \left\langle \left\| \begin{array}{c} iy \\ 0 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{c} 0 \\ y \end{array} \right\| \right\rangle + 2 \left\langle \left\| \begin{array}{c} My \\ M_0 y \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{c} 0 \\ y \end{array} \right\| \right\rangle = 2\left(M_0 y, y\right) > 0.$$

Последовательно, можно доказать что операторы M и M_1 тоже строго положительны, т.е. $(Mx, x) > 0,\ (M_1 x, x) > 0$.

При $\lambda \in \Lambda_j^-$ имеем

$$J - Z_j^* J Z_j < 0, \quad (M_2 x, x) < 0, \quad (M_0 x, x) < 0.$$

Далее $l_j \in \tilde{L}_{x_j,\lambda}$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{c_j}^{x_j} \Psi_j^*\left(\xi_j, \lambda, l_j\right) S_j\left(\xi_j, \lambda\right) \Psi_j\left(\xi_j, \lambda, l_j\right) d\xi_j \geq Jml. \tag{14}$$

Пусть $l_j \in \tilde{L}_{x_j,\lambda}$ и $x_j' < x_j$. Тогда $F\left(x_j, \lambda, l_j\right) \geq 0$ и

$$F\left(x_j', \lambda, l_j\right) \leq \int_{c_j}^{x_j'} \Psi_j^*\left(\xi_j, \lambda, l_j\right) S_j\left(\xi_j, \lambda\right) \Psi_j\left(\xi_j, \lambda, l_j\right) d\xi_j - Jml \geq$$

$$\geq \int_{c_j}^{x_j} \Psi_j^*\left(\xi_j, \lambda, l_j\right) S_j\left(\xi_j, \lambda\right) \Psi_j\left(\xi_j, \lambda, l_j\right) d\xi_j - Jml = F\left(x_j, \lambda, l_j\right).$$

Таким образом, при$\lambda \in \Lambda_j^-$ матричные круги (13) монотонно убывают (вложены друг в друге) с возрастанием $x_j \to b_j$.

Обозначение $\bigcap_{b_j>x_j>c_j}\tilde{L}_{x_j,\lambda}=\tilde{L}$. Тогда если $l\in\tilde{L}$ то

$$\int_{c_j}^{x_j}\Psi_j^*(\xi_j,\lambda,l_j)\,S_j(\xi_j,\lambda)\,\Psi_j(\xi_j,\lambda,l_j)\,d\xi_j\geq Jml \tag{15}$$

и наоборот, если выполнено (15), то $l_j\in\tilde{L}$ (предельный матричный круг для$\lambda\in\Lambda_j^-$).

Таким образом, если $\lambda\in\Lambda_j^+\bigcup\Lambda_j^-$, то имеем

$$\int_{c_j}^{x_j}\Psi_j^*(\xi_j,\lambda,l_j)\,|S_j(\xi_j,\lambda)|\,\Psi_j(\xi_j,\lambda,l_j)\,d\xi_j\geq|Jml|\,. \tag{16}$$

Пусть теперь

$$l_1=\begin{Vmatrix}1\\0\\\cdots\\0\\0\end{Vmatrix},\quad l_2=\begin{Vmatrix}0\\1\\\cdots\\0\\0\end{Vmatrix},\cdots,l_{r_j}=\begin{Vmatrix}0\\0\\\cdots\\0\\1\end{Vmatrix}. \tag{17}$$

ортвекторы. Напишем соотношение (16) для$\lambda\in\Lambda_j^+$ и на векторах $l_1,l_2,\ldots,l_{r_j}$

$$\int_{c_j}^{x_j}\left(\Psi_j^*(\xi_j,\lambda,l_j)\,S_j(\xi_j,\lambda)\,\Psi_j(\xi_j,\lambda,l_j)\,l_j,l_j\right)d\xi_j\leq$$

$$\leq((Jml)\,l_j,l_j)\,,\qquad j=1,2,\ldots,r_j$$

или

$$\int_{c_j}^{x_j}(S_j(\xi_j,\lambda)\,\Psi_j(\xi_j,\lambda,l_j)\,l_j,\Psi_j(\xi_j,\lambda,l_j)\,l_j)\,d\xi_j<+\infty.$$

Пусть

$$\Psi_j(\xi_j,\lambda,l_j)=\begin{Vmatrix}(\Psi_j)_{11}\cdots(\Psi_j)_{1r_j}\\(\Psi_j)_{r_j1}\cdots(\Psi_j)_{r_jr_j}\end{Vmatrix}. \tag{18}$$

Тогда из (17) и (18) получаем

$$\Psi_jl_1=\begin{Vmatrix}(\Psi_j)_{11}\\\vdots\\(\Psi_j)_{r_j1}\end{Vmatrix}=K_j^1(\xi_j,\lambda)\,,\Psi_jl_2=\begin{Vmatrix}(\Psi_j)_{12}\\\vdots\\(\Psi_j)_{r_j2}\end{Vmatrix}=K_j^2(\xi_j,\lambda)\ldots,$$

$$\Psi_jl_{r_j}=\begin{Vmatrix}(\Psi_j)_{1r_j}\\\vdots\\(\Psi_j)_{r_jr_j}\end{Vmatrix}=K_j^{r_j}(\xi_j,\lambda)\,.$$

Таким образом

$$\int_{c_j}^{x_j} \left(S_j\left(\xi_j,\lambda\right) K_j^m\left(\xi_j,\lambda_j\right), K_j^m\left(\xi_j,\lambda\right)\right) d\xi_j < +\infty, \quad m=1,2,\ldots,r_j \tag{19}$$

и в общем случае для $\lambda \in \Lambda_j^+ \bigcup \Lambda_j^-$ имеем функции $K_j^m\left(\xi_j,\lambda\right)$ $m=1,2,\ldots,r_j$ обладающие свойством

$$\int_{c_j}^{x_j} \left(\left|S_j\left(\xi_j,\lambda\right)\right| K_j^m\left(\xi_j,\lambda_j\right), K_j^m\left(\xi_j,\lambda\right)\right) d\xi_j < +\infty. \tag{20}$$

Здесь вектор-функции $K_j^1\left(\xi_j,\lambda\right), K_j^2\left(\xi_j,\lambda\right),\ldots,K_j^m\left(\xi_j,\lambda\right)$ линейно независимы. Так как эти векторы совпадают с соответствующими столбцами матрицы $\Psi_j\left(\xi_j,\lambda,l_j\right)$ и из условия (2) получаем

$$\det\Psi_j\left(c_j,\lambda,l_j\right) = \det\left(\theta_j\left(c_j,\lambda\right) + G_j\left(c_j,\lambda\right) l_j\right) = \det\left(E_{rj} l_j\right) = \det l_j,$$

$$\det\Psi_j^1\left(c_j,\lambda\right) = \det\left(\theta_j'\left(c_j,\lambda\right) + G_j'\left(c_j,\lambda\right) l_j\right) = \det E_{rj} = 1.$$

Теперь исследуем всевозможные случаи принадлежности и непринадлежности тензорных произведений
$y_1\left(x_1,\lambda\right)\otimes y_2\left(x_2,\lambda\right)\otimes\cdots\otimes y_n\left(x_n,\lambda\right)$ (с $r_1\times r_2\times\cdots\times r_n$ компонентом) пространству с весом $L^2\left(J_b,Q(x)dx\right)$, где

$$x=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\in J_b=\left[c_1,b_1\right)\times\cdots\times\left[c_n,b_n\right).$$

Число тензорных произведений $y_1\left(x_1,\lambda\right)\otimes\cdots\otimes y_n\left(x_n,\lambda\right)$ принадлежащих $L^2\left(J_b,Q(x)dx\right)$ назовем индексом дефекта многопараметрической задачи (1) в сингулярном конце в (соответствующей точке λ).

Здесь

$$Q(x)=\det\left\|\begin{matrix} \left(\rho_2\right)_1 A_{11}^t+\left(\rho_1\right)_1 B_{11}^t & \left(\rho_2\right)_2 A_{12}^t+\left(\rho_1\right)_2 B_{12}^t \cdots \left(\rho_2\right)_n A_{1n}^t+\left(\rho_1\right)_n B_{1n}^t \\ \left(\rho_2\right)_1 A_{21}^t+\left(\rho_1\right)_1 B_{21}^t & \left(\rho_2\right)_2 A_{22}^t+\left(\rho_1\right)_2 B_{22}^t \cdots \left(\rho_2\right)_n A_{2n}^t+\left(\rho_1\right)_n B_{2n}^t \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\cdots\cdots \\ \left(\rho_2\right)_1 A_{n1}^t+\left(\rho_1\right)_1 B_{n1}^t & \left(\rho_2\right)_2 A_{n2}^t+\left(\rho_1\right)_2 B_{n2}^t \cdots \left(\rho_2\right)_n A_{nn}^t+\left(\rho_1\right)_n B_{nn}^t \end{matrix}\right\| =$$

$$=\prod_{k=1}^n \left(\rho_2\right)_k\cdot\det\left\|\begin{matrix} A_{11}^t A_{12}^t \cdots A_{1n}^t \\ A_{21}^t A_{22}^t \cdots A_{2n}^t \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ A_{n1}^t A_{n2}^t \cdots A_{nn}^t \end{matrix}\right\| + \prod_{k=1}^n \left(\rho_1\right)_k\cdot\det\left\|\begin{matrix} B_{11}^t B_{12}^t \cdots B_{1n}^t \\ B_{21}^t B_{22}^t \cdots B_{2n}^t \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ B_{n1}^t B_{n2}^t \cdots B_{nn}^t \end{matrix}\right\|$$

является квадратной матрица—функцией размера $r_1\times r_2\times\cdots\times r_n$. Очевидно, что

$$Q(x)y_1\otimes\cdots\otimes y_n=\sum_\sigma \varepsilon_\sigma Q_{1,\sigma(1)}^t\cdots Q_{n,\sigma(n)}^t y_1\otimes\cdots\otimes y_n=$$

$$=\sum_\sigma \varepsilon_\sigma\left(Q_{1,\sigma(1)}^t y_1\right)\otimes\left(Q_{2,\sigma(2)}^t y_2\right)\otimes\cdots\otimes\left(Q_{n,\sigma(n)}^t y_n\right)=$$

$$+\sum_\sigma \varepsilon_\sigma \left(A^t_{1,\sigma(1)}y_1\right)\otimes\left(A^t_{2,\sigma(2)}y_2\right)\otimes\cdots\otimes\left(A^t_{n,\sigma(n)}y_n\right)+$$

$$+\sum_\sigma \varepsilon_\sigma \left(B^t_{1,\sigma(1)}y_1\right)\otimes\left(B^t_{2,\sigma(2)}y_2\right)\otimes\cdots\otimes\left(B^t_{n,\sigma(n)}y_n\right).$$

Поэтому

$$(Q(x)y_1\otimes\cdots\otimes y_n, y_1\otimes\cdots\otimes y_n)=\sum_\sigma \varepsilon_\sigma\left(Q^t_{1,\sigma(1)}y_1,y_1\right)\cdots\left(Q^t_{n,\sigma(n)}y_n,y_n\right)=$$

$$=\sum_\sigma \varepsilon_\sigma\left(A^t_{1,\sigma(1)}y_1,y_1\right)\cdots\left(A^t_{n,\sigma(n)}y_n,y_n\right)+\sum_\sigma \varepsilon_\sigma\left(B^t_{1,\sigma(1)}y_1,y_1\right)\cdots\left(B^t_{n,\sigma(n)}y_n,y_n\right)=$$

$$=\det\left\{(A_{jk}y_j,y_j)\right\}^n_{j,k=1}+\det\left\{(B_{jk}y_j,y_j)\right\}^n_{j,k=1}=$$

$$=\det\left\{\left(y^*_jA_{jk}y_j\right)\right\}^n_{j,k=1}+\det\left\{\left(y^*_jB_{jk}y_j\right)\right\}^n_{j,k=1}.$$

Отсюда вытекает, также что операторы $\left(A^t_{jk}\right)^{r_j}_{j,k=1}$ и $\left(B^t_{jk}\right)^{r_j}_{j,k=1}$действующие в$c^{r_1,\dots,r_n}$ являются строго положительными.

Пусть $\lambda\in\Lambda$ и $\lambda\in R^n$. Тогда хотя бы для одной координаты λ_t точки λ имеем $(\rho_2)_t\neq 0$,$(\rho_1)_t\neq 0$.

Рассмотрим

$$(A(x_j)(y_1(x_1,\lambda)\otimes\cdots\otimes y_n(x_n,\lambda)),(y_1(x_1,\lambda)\otimes\cdots\otimes y_n(x_n,\lambda)))+$$

$$(B(x_j)(y_1(x_1,\lambda)\otimes\cdots\otimes y_n(x_n,\lambda)),(y_1(x_1,\lambda)\otimes\cdots\otimes y_n(x_n,\lambda)))=$$

$$=\det\left\{A_{jk}(x_j)\,y_j(x_j,\lambda),y_j(x_j,\lambda)\right\}^n_{j,k=1}+\det\left\{B_{jk}(x_j)\,y_j(x_j,\lambda),y_j(x_j,\lambda)\right\}^n_{j,k=1}=$$

$$=\det\left\|\begin{array}{c}(A_{11}y_1,y_1)\cdots(A_{1t}y_1,y_1)\cdots(A_{1n}y_1,y_1)\\ \cdots\ \cdots\cdots\ \ \cdots\cdots\cdots\ \ \cdots\cdots\ \ \cdots\ \ \cdots\\ (A_{n1}y_n,y_n)\cdots(A_{nt}y_n,y_n)\cdots(A_{nn}y_n,y_n)\end{array}\right\|+$$

$$+\det\left\|\begin{array}{c}(B_{11}y_1,y_1)\cdots(B_{1t}y_1,y_1)\cdots(B_{1n}y_1,y_1)\\ \cdots\ \cdots\cdots\ \ \cdots\cdots\cdots\ \ \cdots\cdots\ \ \cdots\ \ \cdots\\ (B_{n1}y_n,y_n)\cdots(B_{nt}y_n,y_n)\cdots(B_{nn}y_n,y_n)\end{array}\right\|=$$

$$=(A_{1t}(x_1)\,y_1(x_1),y_1(x_1))\,A^{(1,t)}(x_2,\dots,x_n)+(A_{2t}(x_2)\,y_2(x_2),y_2(x_2))\cdot$$

$$\cdot A^{(2,t)}(x_1,x_3,\dots,x_n)+\cdots+(A_{nt}(x_n)\,y_n(x_n),y_n(x_n))\,A^{(n,t)}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})+$$

$$+(B_{1t}(x_1)\,y_1(x_1),y_1(x_1))\,B^{(1,t)}(x_2,x_3,\dots,x_n)+(B_{2t}(x_2)\,y_2(x_2),y_2(x_2))\cdot$$

$$\cdot B^{(2,t)}(x_1,x_3,\dots,x_n)+\cdots+(B_{nt}(x_n)\,y_n(x_n),y_n(x_n))\,B^{(n,t)}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})$$

Далее, нетрудно видеть, что

$$S_j(x_j,\lambda)=T_j(x_j)+\sum_{k=1}^n\left((\rho_2)_k\,A_{jk}(x_j)+(\rho_1)_k\,B_{jk}(x_j)\right),$$

$$A_{jt} = \frac{1}{(\rho_2)_k} S_j(x_j,\lambda) - \frac{1}{(\rho_2)_t} T_j(x_j) - \sum_{\substack{k=1\\k\neq t}}^{n} \frac{(\rho_2)_k}{(\rho_2)_t} A_{jk}(x_j), \quad j=\overline{1,n}, \tag{21}$$

$$B_{jt} = \frac{1}{(\rho_1)_k} S_j(x_j,\lambda) - \frac{1}{(\rho_1)_t} T_j(x_j) - \sum_{\substack{k=1\\k\neq t}}^{n} \frac{(\rho_1)_k}{(\rho_1)_t} B_{jk}(x_j), \quad j=\overline{1,n} \tag{22}$$

Из (**??**), (21) и (22) получаем:

$$(A(x)y_1\otimes\cdots\otimes y_n, y_1\otimes\cdots\otimes y_n) = \sum_{q=1}^{n} \left(A_{qt}(x_q)\, y_q(x_q,\lambda), y_q(x_q,\lambda)\right)\times$$

$$\times\left(A^{(q,t)}(x_1,\ldots,\hat{x}_q,\ldots,x_n)\right) = \frac{1}{(\rho_2)_t}\sum_{q=1}^{n}\left(S_q(x_q,\lambda)\, y_q(x_q,\lambda), y_q(x_q,\lambda)\right)\times$$

$$\times\left(A^{(q,t)}(x_1,\ldots,\hat{x}_q,\ldots,x_n)\right) = \frac{1}{(\rho_2)_t}\sum_{q=1}^{n}\left(T_q(x_q)\, y_q, y_q\right)\left(A^{(q,t)}(x_1,\ldots,\hat{x}_q,\ldots,x_n)\right) -$$

$$-\sum_{q=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq t}}^{n} \frac{(\rho_2)_k}{(\rho_2)_t}\left(A_{qk}(x_q)\, y_q, y_q\right)\left(A^{(q,t)}(x_1,\ldots,\hat{x}_q,\ldots,x_n)\right), \tag{23}$$

и

$$(B(x)y_1\otimes\cdots\otimes y_n, y_1\otimes\cdots\otimes y_n) = \sum_{q=1}^{n} \left(B_{qt}(x_q)\, y_q(x_q,\lambda), y_q(x_q,\lambda)\right)\times$$

$$\times\left(B^{(q,t)}(x_1,\ldots,\hat{x}_q,\ldots,x_n)\right) = \frac{1}{(\rho_1)_t}\sum_{q=1}^{n}\left(S_q(x_q,\lambda)\, y_q(x_q,\lambda), y_q(x_q,\lambda)\right)\times$$

$$\times\left(B^{(q,t)}(x_1,\ldots,\hat{x}_q,\ldots,x_n)\right) - \frac{1}{(\rho_1)_t}\sum_{q=1}^{n}\left(T_q(x_q)\, y_q, y_q\right)\times$$

$$\times\left(B^{(q,t)}(x_1,\ldots,\hat{x}_q,\ldots,x_n)\right) - \sum_{q=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq t}}^{n} \frac{(\rho_1)_k}{(\rho_1)_t}\left(B_{qk}(x_q)\, y_q, y_q\right)\left(B^{(q,t)}(x_1,\ldots,\hat{x}_q,\ldots,x_n)\right). \tag{24}$$

где знак "Λ" над переменной означает пропускание этой переменной.

Далее, имеем

$$(A(x)y_1\otimes\cdots\otimes y_n) = \det\left\{(A_{jk}y_j, y_j)\right\}_{j,k=1}^{n} = \frac{1}{(\rho_2)_t}\times$$

$$\times\left\|\begin{array}{cccccccc} (A_{11}y_1y_1)\cdots(S_1y_1y_1)-(T_1y_1y_1)-\sum^n_{\substack{k=1\\k\neq t}}(\rho_2)_k\left(A_{1k}\left(x_1\right)y_1,y_1\right)\cdots(A_{1n}y_1,y_1) \\ \cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots \\ (A_{n1}y_n,y_n)\cdots(S_ny_n,y_n)-(T_ny_n,y_n)-\sum^n_{\substack{k=1\\k\neq t}}(\rho_2)_k\left(A_{nk}\left(x_n\right)y_n,y_n\right)\cdots(A_{nn}y_n,y_n)\end{array}\right\|$$

и

$$(B(x)y_1\otimes\cdots\otimes y_n)=\det\left\{(B_{jk}y_j,y_j)\right\}_{j,k=1}^n=\frac{1}{(\rho_2)_t}\det\times$$

$$\times\left\|\begin{array}{cccccccc} (B_{11}y_1y_1)\cdots(S_1y_1y_1)-(T_1y_1y_1)-\sum^n_{\substack{k=1\\k\neq t}}(\rho_1)_k\left(B_{1k}\left(x_1\right)y_1,y_1\right)\cdots(B_{1n}y_1,y_1) \\ \cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots \\ (B_{n1}y_ny_n)\cdots(S_ny_ny_n)-(T_ny_ny_n)-\sum^n_{\substack{k=1\\k\neq t}}(\rho_1)_k\left(B_{nk}\left(x_n\right)y_n,y_n\right)\cdots(B_{nn}y_n,y_n)\end{array}\right\|.$$

Поэтому для произвольное точки $b'\in(c,b)$ справедливо следующее интегральное соотношение

$$\int_{[c,b')}\left(A(x)y_1\otimes\cdots\otimes y_n,y_1\left(x_n,\lambda\right)\otimes\cdots\otimes y_n\left(x_n,\lambda\right)\right)dx_1\ldots dx_n=$$

$$=\frac{1}{(\rho_2)_t}\int_{[c,b')}\sum_{q=1}^n\left(S_qy_q,y_q\right)A^{(q,t)}_{jk}\left(x_1,\ldots,\hat{x}_q,\ldots,x_n\right)dx-$$

$$-\frac{1}{(\rho_2)_t}\int_{[c,b')}\sum_{q=1}^n\left(T_qy_q,y_q\right)A^{(q,t)}_{jk}dx-\frac{1}{(\rho_2)_t}\sum_{q=1}^n\int_{[c_q,b'_q)}\sum_{\substack{k=1\\k\neq t}}^n(\rho_2)_k\left(A_{qk}y_q,y_q\right)A^{(q,t)}_{qk}dx,$$

$$\int_{[c,b')}\left(B(x)y_1\otimes\cdots\otimes y_n,y_1\left(x_1,\lambda\right)\otimes\cdots\otimes y_n\left(x_n,\lambda\right)\right)dx_1\ldots dx_n=$$

$$=\frac{1}{(\rho_1)_t}\int_{[c,b')}\sum_{q=1}^n\left(S_qy_q,y_q\right)B^{(q,t)}_{jk}\left(x_1,\ldots,\hat{x}_q,\ldots,x_n\right)dx-$$

$$-\frac{1}{(\rho_1)_t}\int_{[c,b')}\sum_{q=1}^n\left(T_qy_q,y_q\right)B^{(q,t)}_{jk}dx-\frac{1}{(\rho_1)_t}\sum_{q=1}^n\int_{[c_q,b'_q)}\sum_{\substack{k=1\\k\neq t}}^n(\rho_1)_k\left(B_{qk}y_q,y_q\right)B^{(q,t)}_{qk}dx.$$

Итак, существует номер $t\in\{1,2,\ldots,n\}$ такой, что

$$\int_{[c,b')}\left(Ay_1\otimes\cdots\otimes y_n,y_1\otimes\cdots\otimes y_n\right)dx=\frac{1}{(\rho_2)_t}\sum_{q=1}^n\int_{[c_q,b'_q]}\left(S_qy_q,y_q\right)dx_q\cdot\int\cdots\int A^{(q,t)}dx_1\cdots$$

$$\cdots \overset{\Lambda}{dx_q} \cdots dx_n - \frac{1}{(\rho_2)_t} \sum_{q=1}^{n} \int_{\left[c_q, b'_q\right)} (T_q y_q, y_q)\, dx_q \cdot \int \cdots \int A^{(q,t)} dx_1 \cdots \overset{\Lambda}{dx_q} \cdots dx_n,$$

$$\int_{[c,b')} (By_1 \otimes \cdots \otimes y_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n)\, dx = \frac{1}{(\rho_1)_t} \sum_{q=1}^{n} \int_{\left[c_q, b'_q\right]} (S_q y_q, y_q)\, dx_q \cdot \int \cdots \int B^{(q,t)} dx_1 \cdots$$

$$\cdots \overset{\Lambda}{dx_q} \cdots dx_n - \frac{1}{(\rho_1)_t} \sum_{q=1}^{n} \int_{\left[c_q, b'_q\right)} (T_q y_q, y_q)\, dx_q \cdot \int \cdots \int B^{(q,t)} dx_1 \cdots \overset{\Lambda}{dx_q} \cdots dx_n.$$

С учетом вида алгебраических дополнений $A^{(q,t)}(x_1, \ldots, \hat{x}_q \cdots x_n)$ и $B^{(q,t)}(x_1, \ldots, \hat{x}_q \cdots x_n)$ предыдущей формулы получим:

$$\int_{[c,b')} \det\{(A_{jk} y_j, y_j)\}_{j,k=1}^{n} dx = \frac{1}{(\rho_2)_t} \sum_{q=1}^{n} \left\{ \int_{c_q}^{b'_q} (S_q y_q, y_q)\, dx_q \cdot \right.$$

$$\cdot (-1)^{q+t} \sum_{\hat{\sigma}} \int_{c_q}^{b'_q} \left(A_{1,\sigma(1)} y_1, y_1\right) dx_1 \cdots \int_{c_q}^{b'_q} \overset{\Lambda}{dx_q} \cdots \int_{c_n}^{b'_n} \left(A_{n,\sigma(1)} y_n, y_n\right) dx_n -$$

$$- \frac{1}{(\rho_2)_t} \sum_{q=1}^{n} \int_{c_q}^{b'_q} (T_q y_q, y_q)\, dx_q (-1)^{q+t} \sum_{\hat{\sigma}} \int_{c_1}^{b'_1} \left(A_{1,\sigma(1)} y_1, y_1\right) dx_1 \cdots \int_{c_n}^{b'_n} (A_n y_n, y_n)\, dx_n \tag{25}$$

$$\int_{[c,b')} \det\{(B_{jk} y_j, y_j)\}_{j,k=1}^{n} dx = \frac{1}{(\rho_1)_t} \sum_{q=1}^{n} \left\{ \int_{c_q}^{b'_q} (S_q y_q, y_q)\, dx_q \cdot \right.$$

$$\cdot (-1)^{q+t} \sum_{\hat{\sigma}} \int_{c_1}^{b'_1} \left(B_{1,\sigma(1)} y_1, y_1\right) dx_1 \cdots \int_{c_q}^{b'_q} \overset{\Lambda}{dx_q} \cdots \int_{c_n}^{b'_n} \left(B_{n,\sigma(1)} y_n, y_n\right) dx_n -$$

$$- \frac{1}{(\rho_1)_t} \sum_{q=1}^{n} \int_{c_q}^{b'_q} (T_q y_q, y_q)\, dx_q (-1)^{q+t} \sum_{\hat{\sigma}} \int_{c_1}^{b'_1} \left(B_{1,\sigma(1)} y_1, y_1\right) dx_1 \cdots \int_{c_n}^{b'_n} (B_n y_n, y_n)\, dx_n. \tag{26}$$

Из (25) при $q = 1$ получаем:

$$\int_{[c,b')} \det\{(A_{jk} y_j, y_j)\}_{j,k=1}^{n} dx = \frac{1}{(\rho_2)_t} \int_{c_1}^{b'_1} (S_1 y_1, y_1)\, dx_1 \cdot$$

$$\cdot (-1)^{1+t} \sum_{\hat{\sigma}} \int_{c_2}^{b'_2} \left(A_{2,\sigma(2)} y_2, y_2\right) dx_2 \cdots \int_{c_n}^{b'_n} \left(A_{n,\sigma(n)} y_n, y_n\right) dx_n - \cdots,\ (t \notin \sigma(2), \cdots, \sigma(n))$$

и аналогично при $q = n$ получим:

$$\int_{[c,b')} \det\{(A_{jk} y_j, y_j)\}_{j,k=1}^{n} dx = \frac{1}{(\rho_2)_t} \int_{c_n}^{b'_n} (S_n y_n, y_n)\, dx_n \cdot$$

$$\cdot(-1)^{n+t}\sum_{\hat{\sigma}}\int_{c_1}^{b_1'}\left(A_{1,\sigma(1)}y_1,y_1\right)dx_1\cdots\int_{c_{n-1}}^{b_{n-1}'}\left(A_{n-1,\sigma(n-1)}y_{n-1},y_{n-1}\right)dx_{n-1}-$$

$$\cdots,\ (t\notin\sigma(1),\cdots,\sigma(n-1)).$$

Из (26) при $q=1$ получим:

$$\int_{[c,b')}\det\left\{(B_{jk}y_j,y_j)\right\}_{j,k=1}^{n}dx=\frac{1}{(\rho_1)_t}\int_{c_1}^{b_1'}(S_1y_1,y_1)\,dx_1\cdot$$

$$\cdot(-1)^{1+t}\sum_{\hat{\sigma}}\int_{c_2}^{b_2'}\left(B_{2,\sigma(2)}y_2,y_2\right)dx_2\cdots\int_{c_n}^{b_n'}\left(B_{n,\sigma(n)}y_n,y_n\right)dx_n-\cdots,\ (t\notin\sigma(2),\cdots,\sigma(n)),$$

и аналогично при $q=n$ получим

$$\int_{[c,b')}\det\left\{(B_{jk}y_j,y_j)\right\}_{j,k=1}^{n}dx=\frac{1}{(\rho_1)_t}\int_{c_n}^{b_n'}(S_ny_n,y_n)\,dx_n\cdot$$

$$\cdot(-1)^{n+t}\sum_{\hat{\sigma}}\int_{c_1}^{b_1'}\left(B_{1,\sigma(1)}y_1,y_1\right)dx_1\cdots\int_{c_{n-1}}^{b_{n-1}'}\left(B_{n-1,\sigma(n-1)}y_{n-1},y_{n-1}\right)dx_{n-1}-$$

$$\cdots,\ (t\notin\sigma(1),\cdots,\sigma(n-1)).$$

Таким образом, здесь участвуют все элементы матрицы $\{(A_{jk}y_j,y_j)\}_{j,k=1}^{n}$ и $\{(B_{jk}y_j,y_j)\}_{j,k=1}^{n}$ кроме ее t-го столбца.

Отсюда получим, что если все $(A_{jk}y_j,y_j)$ и $(B_{jk}y_j,y_j)(k\neq t)$«подчинены» (S_jy_j,y_j) а также (T_jy_j,y_j)«подчинены»(S_jy_j,y_j), то тензорное произведение $\Psi_1\otimes\cdots\otimes\Psi_n$ принадлежит пространству $L_2\left([c,b)\,;Q(x)dx\right)$.

Теперь поинтересуемся другими возможными решениями из$L^2\left([c,b)\,;|s_j|\,dx_j\right)$.

Рассмотрим формулу (5)

$$\int_{c_j}^{x_j}y_j^*\left(\xi_j,\lambda\right)S_j\left(\xi_j,\lambda\right)Y_j\left(\xi_j,\lambda\right)d\xi_j=\frac{1}{2i}W\left[G_j^*,G_j\right]\Big|_{c_j}^{x_j}.$$

Тогда из (2) получаем

$$W\left[G_j^*,G_j\right](c_j)=2i\left(G_j^*\left(c_j,\lambda\right)G_j'\left(c_j,\lambda\right)-\left[G_j^*\left(c_j,\lambda\right)\right]'\cdot G_j\left(c_j,\lambda\right)\right)=0.$$

Далее

$$W\left[G_j^*,G_j\right](x_j)=2i\left(G_j^*\left(x_j,\lambda\right)G_j'\left(x_j,\lambda\right)-\left[G_j^*\left(x_j,\lambda\right)\right]'\cdot G_j\left(x_j,\lambda\right)\right)=2iM_2\left(x_j,\lambda\right).$$

Тогда

$$\int_{c_j}^{x_j}G_j^*\left(\xi_j,\lambda\right)S_j\left(\xi_j,\lambda\right)G_j\left(\xi_j,\lambda\right)d\xi_j=M_2\left(x_j,\lambda\right).$$

Отсюда видно, что при $x_j < x'_j$, $M_2(x_j,\lambda) < M_2\left(x'_j,\lambda\right)$.

Поэтому существует

$$\lim_{x_j \to b_j} M_2(x_j,\lambda) \equiv M_2(\lambda) \geq 0.$$

Тогда если $M_2(\lambda) > 0$, то по определению имеем предельного круга$\{l : F(x_j,\lambda,l_j) \leq 0\}$, если $\ker M_2(\lambda) \neq \{0\}$, то случай предельной точки.

Если матрица $M_2(x_j,\lambda)$ невырожденная для некоторых значений $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, то можно найти дополнительные тензорные произведения решений, принадлежащие пространству $L_2([c_j,b);|S_j|\,dx)$.

Эти соображения позволит оценить число таких произведений, т.е. числа решений линейно независимых тензорных произведения от многопараметрической системы уравнений (1) получается так: Это число является постоянными на каждой компоненте.$N_k, k = 1,2,\ldots,2n$множество $\lambda \in \Lambda$.

Отметим, что если $(B_{jk}(x_j))_{r_j \times r_j}$ является $O_{r_j \times r_j}$ матрицей, получается ([5],[6]).

Список литературы

[1] Координгтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. «ИЛ» М.1958, с.240-284.

[2] Левитан В.М. и др. Введение в спектральную теорию. «Наука» М.,1970, с.144-234.

[3] Лидский В.Б. Несамосопряженный оператор типа Штурма-Лиувилля с дискретным спектром. Труды моск. матем. общ. 1960, т.9, с.45-75.

[4] Исаев Г.А. К теории индексов дефекта многопараметрических дифференциальных операторов типа Штурма-Лиувилля. Докл. АН СССР, 1981, т.261, №4, с.788-791.

[5] Алмамедов М.С. О собственных произведениях многопараметрических матричных уравнений Штурма-Лиувилля. Докл. АН СССР, 1989, т.305, №1, с.14-17.

[6] Алмамедов М.С. О собственных произведениях многопараметрических матричных уравнений Штурма-Лиувилля. Journal of contemporary applied math. г. Баку, ISSN:2222-5498.v.6, №2, (2016), с,53-69.

М.С. Алмамедов

Азербайджанский Государственный Экономический Университет (UNEC)

E-mail: musa.almamedov@mail.ru

Received 5 May 2019

Accepted 04 November 2019